Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre o primeiro salto de autovalores para o h-Laplaciano, desigualdades universais para o problema de vibração de uma placa e estimativa do tipo conjectura de Pólya

por

Leonardo Gomes

Brasília

Agosto de 2011

Aos meus pais

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus pela vida e oportunidades que me foram dadas;
- À minha família, com muito carinho, que sempre me deram forças para que eu superasse cada desafio desta vida;
- Ao professor Xia pela orientação e paciência e à professora Wang, pela co-orientação;
- Ao Departamento de Matemática da UnB e a todos os meus amigos, em especial ao Miguel, Magno, Vagner, Flávia e Tonires;
- À CAPES e CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos três tipos diferentes de desigualdades envolvendo autovalores de diversos operadores. Primeiramente encontramos uma estimativa inferior para o primeiro salto dos autovalores para o h-Laplaciano, melhorando em particular algumas estimativas já conhecidas para tal operador. Em seguida, obtemos uma desigualdade universal para autovalores do problema de vibração de uma placa com extremidades fixas sobre variedades Riemannianas. Por fim, apresentamos uma estimativa inferior para autovalores do tipo conjectura de Pólya para operadores elípticos mais gerais.

Palavras-chave: estimativa para autovalores, salto fundamental, desigualdade universal, conjectura de Pólya, operadores elípticos.

Abstract

In this work we present three different types of inequalities involving eigenvalues of several operators. Firstly we find a lower bound for the fundamental gap for the h-Laplacian improving in particular, some estimates already known to such operator. Next, we obtain a universal inequality for eigenvalues of the vibration problem for a clamped plate on Riemannian manifolds. Finaly we give a lower bound for eigenvalues of Pólya conjecture type for more general eliptic operators.

Key words: eigenvalue estimates, fundamental gap, universal inequality, Pólya conjecture, eliptic operators.

Sumário

Introdução **1**

1 Resultados Preliminares **6**

1.1 O Teorema do Divergente 6

1.2 Fórmula de Bochner 8

1.3 O espaço L^2 10

1.4 Desigualdades Isoperimétricas 11

1.5 Autovalores de Operadores Elípticos 13

1.5.1 Autovalores do operador *h-Laplaciano* 14

1.5.2 Autovalores para o Laplaciano de ordem $l \geq 1$ 15

2 O primeiro salto dos autovalores do operador h-Laplaciano **17**

2.1 Resultados auxiliares 18

2.2 Uma estimativa inferior para o primeiro salto de autovalores 21

2.2.1 Outra estimativa para o primeiro salto 31

3 Desigualdade Universal para autovalores do problema de vibração de uma placa com extremidades fixas **34**

3.1 Uma desigualdade universal 35

3.2 Aplicações 43

3.2.1 Exemplos 51

4 Estimativas para autovalores e a Conjectura de Pólya **53**

4.1 Resultados auxiliares 53

4.2 Generalização do Teorema de Cheng-Wei 62

Referências Bibliográficas **79**

Introdução

Consideremos o problema de vibração de uma membrana com extremidades fixas em $\mathbb{R}^2$, conhecido como o *problema de Dirichlet* e modelado como abaixo

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u & = & \lambda u, \text{ em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right., \tag{1}$$

onde Ω representa a membrana ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é aberto conexo e limitado com fronteira suave), $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o operador de Laplace usual, e λ é um número real chamado o *autovalor de Dirichlet*. É conhecido que existe uma certa proporcionalidade entre os autovalores de Dirichlet e o quadrado da autofrequência de vibração da membrana. As funções u que satisfazem o problema são conhecidas como *autofunções de Dirichlet*, e estas descrevem o comportamento da membrana quando esta está vibrando.

Se modificarmos o problema de Dirichlet e escrevermos

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u & = & \lambda u, \text{ em } \Omega \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right., \tag{2}$$

com ν sendo o campo normal unitário exterior a $\partial\Omega$, obtemos o chamado *problema de Neumann*. Este problema também possui um significado aplicado na física, por exemplo, o fluxo de calor em um recipiente fechado. Por estes e outros motivos, torna-se interessante o estudo destes problemas ou similares a estes.

Podemos então pensar em estender tais questões para outras muito mais gerais e considerar, por exemplo, em vez do operador de Laplace, o *operador de Schrödinger*

$$\Delta + V,$$

com V sendo uma função adequada, ou até mesmo o *poli-Laplaciano*

$$(\Delta)^l = \underbrace{\Delta\Delta\Delta\cdots\Delta}_{l-vezes}.$$

Diante disto, poderíamos estudar tanto os autovalores quanto as autofunções de problemas envolvendo tais operadores. Porém, o objetivo deste trabalho será o de encontrar somente relações para os autovalores. Por exemplo, para o problema (1), Yang [38] provou que

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\lambda_{k+1}-\left(1+\frac{4}{n}\right)\lambda_i\right)\leq 0, \tag{3}$$

onde λ_k significará para nós o k-ésimo autovalor. Para o operador de Schrödinger com hipóteses adequadas sobre o domínio e condição de fronteira de Dirichlet, Yu e Zhong [41] provaram que

$$\lambda_2-\lambda_1\geq\frac{\pi^2}{d^2}, \tag{4}$$

onde d é o diâmetro do domínio.

Ainda para o mesmo problema de Dirichlet, existe a conjectura de Pólya posta em 1960, a qual afirma que para qualquer domínio $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ e todo k inteiro positivo vale

$$\lambda_k\geq(2\pi)^2\left(\frac{k}{\omega_n|\Omega|}\right)^{2/n}, \tag{5}$$

com $|\Omega|$ sendo o volume de Ω e ω_n representando o volume da esfera unitária n-dimensional do espaço euclidiano. Várias outras tentativas para se provar a conjectura de Pólya foram feitas, por exemplo, em 1982 Li-Yau [27] mostraram a seguinte estimativa

$$\lambda_k\geq\frac{nk(2\pi)^2}{(n+2)\omega_n^{2/n}}\left(\frac{k}{|\Omega|}\right)^{2/n}. \tag{6}$$

Desigualdades semelhantes para o mesmo operador com condições de fronteira de Neumann também são amplamente estudadas e algumas destas desigualdades podem ser encontradas em [23] e [24]. Ao longo do texto trataremos destas três desigualdades diferentes para autovalores, cada uma relacionada a operadores distintos definidos sobre domínios diferentes.

Para início de leitura, no Capítulo 1 deixamos para o leitor uma série de definições, observações e também resultados com o intuito de facilitar a leitura do trabalho e justificar alguns fatos utilizados ao longo do texto.

O Capítulo 2 trata a respeito do operador conhecido como $h-$Laplaciano, definido como sendo um operador do tipo $\Delta_h = \Delta - \langle \nabla h, \nabla \rangle$, onde h é uma função contínua definida sobre um domínio apropriado. Para sermos mais específicos, estaremos interessados em encontrar uma estimativa do tipo (4), também conhecida como *o primeiro salto dos autovalores* ou *o primeiro salto fundamental dos autovalores*, para o problema

$$\begin{cases} \Delta_h u + Vu = \lambda u, \text{ em } \Omega \\ \hfill u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

onde Ω é um domínio limitado convexo suave em uma variedade Riemanniana completa, h e V são funções suaves sobre $\overline{\Omega}$ com algumas hipóteses adicionais que serão comentadas posteriormente. Para o problema (7), admitindo as mesmas hipóteses impostas por Li Ma e Baiyu Liu [30], conseguimos melhorar alguns dos resultados já obtidos por eles em [29] e [30].

A partir do Capítulo 3 passamos a trabalhar com operadores elípticos de maior ordem, a saber, começamos interessados em exibir uma desigualdade do tipo (3) (também conhecida como desigualdade universal) envolvendo os primeiros k autovalores do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \rho\Delta u &= z\Gamma u \text{ em } \Omega \\ \qquad u|_{\partial\Omega} &= \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Neste caso, M significará para nós uma variedade Riemanniana completa n-dimensional, Ω um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ em M, ν será o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$, $z > 0$ uma função definida em Ω e ρ uma constante não negativa. Este problema também é conhecido como problema do *operador biharmônico de Dirichlet* ou *problema de vibração de uma placa com extremidades fixas.* Esta denominação surge pela aplicação física que o próprio nome sugere, a força externa exercida sobre uma placa com extremidades fixas.

Os primeiros a exibir uma desigualdade universal para o problema (8) em domínios de $\mathbb{R}^n$ com $\rho = 0$ e $z = 1$ foram Cheng e Yang [14]. Eles provaram que

$$\Gamma_{k+1} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Gamma_i \leq \left(\frac{8(n+2)}{n^2}\right)^{1/2}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_i(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i))^{1/2}.$$

Ainda para o caso $\rho = 0$ e $z = 1$, temos desigualdades envolvendo vários tipos de variedades e que podem ser encontradas em [15, 16, 42]. Xia [11] exibe várias desigualdades para diferentes tipos de variedades Riemannianas completas, entretanto explorando apenas o caso $z = 1$. Provaremos no Capítulo 3 uma desigualdade universal para o problema (8) e analisaremos alguns casos considerados por Xia e Wang [42], constatando a generalização desses casos obtidos por eles quando consideramos $\rho = 0$ e $z = 1$.

Por fim, no Capítulo 4, trabalharemos com desigualdades do tipo conjectura de Pólya (5) para operadores poliharmônicos. A saber, o problema estudado é

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-\Delta)^l u &=& \lambda(-\Delta)^r u \quad \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &=& \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \ldots = \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \end{array}\right. \tag{9}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado conexo, $r \geq 0$ e l inteiros positivos tais que $l \geq r+1$, e ν o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Para isso, generalizamos o Lema de Cheng e Wei [17] utilizando de lemas e proposições de Melas [31] e Xia e Wang [43]. Isto nos levou a uma desigualdade que generaliza a Desigualdade de Cheng e Wei [17].

Provavelmente, o primeiro a estudar uma desigualdade do tipo (5) foi Weyl em 1912, onde em [44] provou a fórmula assintótica de Weyl para o problema (1)

$$\lambda_k \sim C(n)\left(\frac{k}{|\Omega|}\right)^{2/n}, \tag{10}$$

onde $C(n) = (2\pi)^2\omega_n^{-2/n}$. Décadas depois, em 1960, Pólya [33] provou que para uma infinidade de domínios congruentes a Ω que cobrem todo o espaço $\mathbb{R}^n$ sem falhas e sem sobreposição, exceto em um conjunto de medida zero, vale a desigualdade

$$\lambda_k \geq C(n)\left(\frac{k}{|\Omega|}\right)^{2/n}, \tag{11}$$

e conjecturou que o mesmo vale para qualquer domínio em $\mathbb{R}^n$. Já em 1982, Li e Yau [27] obteram a estimativa

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq \frac{nkC(n)}{n+2} \left(\frac{k}{|\Omega|} \right)^{2/n}, \tag{12}$$

cuja consequência é a desigualdade

$$\lambda_k \geq \frac{nC(n)}{n+2} \left(\frac{k}{|\Omega|} \right)^{2/n}. \tag{13}$$

A seguir vieram também os trabalhos de Melas [31], Cheng e Wei [17] e generalizações, encontradas em [25] e em Xia e Wang [43].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Como dito, neste capítulo enunciamos resultados básicos e preliminares com o propósito de facilitar a leitura deste trabalho. Vamos sempre denotar por $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – ou simplesmente M – uma variedade Riemanniana n-dimensional com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e por ∂M como sendo a fronteira de M. Para cada $p \in M$, T_pM denotará o espaço tangente a M no ponto p e TM denotará o conjunto formado pela união de todos os espaços tangentes munidos com uma estrutura diferenciável. No que segue a palavra *diferenciável* ou *suave* significará para nós C^∞ e $C^k(M)$ denotará o conjunto das funções reais de classe C^k definidas em M.

1.1 O Teorema do Divergente

Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional. Sabemos que um *campo de vetores* X em M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. O campo é um *campo diferenciável* se a aplicação $X : M \longmapsto TM$ é diferenciável.

Dentre os vários tipos de campos de vetores, destaca-se ao longo deste trabalho o campo vetorial gradiente de uma função suave.

Definição 1.1. Seja f uma função diferenciável sobre M. Definimos o *gradiente de f*, denotado por ∇f, como o campo vetorial sobre M satisfazendo

$$\langle \nabla f, X \rangle = Xf,$$

para todo $X \in T_pM$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica em M.

Observação 1.1. Com base em propriedades de diferenciação, temos as seguintes relações

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,
2. $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$,

para $f, g \in C^1(M)$.

Definição 1.2. Para um campo de vetores suave X em M, a *divergência de X*, denotado por $divX$, é uma função diferenciável em M satisfazendo

$$(div\, X)(p) = \text{traço}(Y \longrightarrow \nabla_Y X),$$

onde Y varia em T_pM e ∇_Y é a derivada covariante na direção do vetor $Y(p)$.

Observação 1.2. Das propriedades da derivada covariante e do divergente, para $f \in C^1(M)$ e X, Y campos suaves sobre M, valem

1. $div(X+Y) = divX + divY$,
2. $div(fX) = f(divX) + \langle \nabla f, X \rangle$.

Definição 1.3. Considere f uma função em $C^k(M)$, onde $k \geq 2$. O *Laplaciano de f*, denotado por Δf, é definido por

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Observação 1.3. Em virtude das definições e observações dos operadores gradiente e divergente, para $f, g \in C^k(M)$ $(k \geq 2)$, temos

1. $\Delta(f+h) = \Delta f + \Delta h$,

2. $div(h(\nabla f)) = h(\Delta f) + \langle \nabla h, \nabla f \rangle$,

3. $\Delta(fh) = h(\Delta f) + f(\Delta h) + 2\langle \nabla f, \nabla h \rangle$.

Neste momento, suponhamos dispor de uma teoria de integração para M tal que sua fronteira ∂M possua métrica Riemanniana induzida mensurável. Se denotarmos por dx a medida usual de Lebesgue, temos o seguinte teorema

Teorema 1.1 (Teorema do Divergente)**.** *Sejam X um campo de vetores suave em M e ν o campo unitário normal exterior a ∂M. Então*

$$\int_M (divX)dx = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, dx. \tag{1.1}$$

Como consequência do Teorema do Divergente temos as identidades de Green

Teorema 1.2 (Identidades de Green)**.** *Sejam f e h funções suaves sobre M. Então*

$$\int_M (h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f \rangle)dx = \int_{\partial M} h\frac{\partial f}{\partial \nu}dx. \tag{1.2}$$

Ainda, vale também

$$\int_M (h\Delta f - f\Delta h)dx = \int_{\partial M} \left(h\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\frac{\partial h}{\partial \nu} \right) dx. \tag{1.3}$$

Observação 1.4. A partir daqui, com o propósito de não deixar as equações com notações carregadas, deixaremos de escrever o termo dx (medida usual de Lebesgue) nas integrais salvo em algumas poucas situações para não ocorrer risco de confusão.

1.2 Fórmula de Bochner

Até então, as definições e fórmulas vistas anteriormente nos fornecem relações que de certa forma não apresentam entes geométricos, isto é, apesar do nosso meio ser uma variedade Riemanniana, por enquanto apresentamos fórmulas envolvendo somente a conexão e a métrica da variedade em questão. O objetivo desta seção é enunciar a fórmula de Bochner, a qual apresenta uma relação entre o laplaciano de uma certa função com a curvatura de Ricci da variedade considerada.

Para isto, lembramos que dada uma função f suave sobre M, o *Hessiano de* f em p, ou *a forma Hessiana de* f em p, a qual denotaremos por $\nabla^2 f$, é definida por

$$\nabla^2 f(X,Y) = (XYf)(p) - (\nabla_X Y f)(p), \tag{1.4}$$

onde ∇ representa a conexão em M^n, e $X, Y \in T_pM$ são campos suaves. Ainda, se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal em T_pM, a norma do Hessiano de f, $|\nabla^2 f|$ é calculada como segue

$$|\nabla^2 f|^2 = \left| \sum_{i,j=1}^{n} |\nabla^2 f(e_i, e_j)|^2 \right|. \tag{1.5}$$

Considere as mesmas notações acima e tome $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle}$, para x, y pertencentes a um espaço vetorial V, onde $|x|^2 = \langle x, x\rangle$.

Definição 1.4. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real

$$K(\sigma) = K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}, \tag{1.6}$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado *curvatura seccional* de σ em p.

Definidas estas notações, é bem conhecido que em um ponto $p \in M$, a *curvatura de Ricci*, $Ric = Ric_M : T_pM \times T_pM \longmapsto \mathbb{R}$ é uma forma bilinear. Assim, se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal de T_pM, e $v = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$ é qualquer vetor, então

$$Ric(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} K(e_i, e_j) a^i a^j. \tag{1.7}$$

Apresentamos agora a Fórmula de Bochner, cujo uso será indispensável para a prova dos resultados no Capítulo 2.

Teorema 1.3 (Fórmula de Bochner). *Considere $f \in C^3(M)$. Se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal de T_pM, então em p, vale*

$$\Delta|\nabla f|^2 = 2|\nabla^2 f|^2 + 2\langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + 2Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{1.8}$$

Uma demonstração para a Fórmula de Bochner pode ser encontrada em [36].

1.3 O espaço L^2

Denotemos por $L^2(M) = \left\{ f : M \longmapsto \mathbb{R}; f \text{ é mensurável em } M \text{ e } \int_M |f|^2 < \infty \right\}$. Sobre $L^2(M)$ temos um produto interno $(\cdot,\cdot) : L^2(M) \times L^2(M) \longmapsto \mathbb{R}$ dado por

$$(f,g) = \int_M fg,$$

e induzido por ele, uma norma $\|\cdot\|^2 : L^2(M) \longmapsto \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|^2 = \int_M f^2 = (f,f).$$

Portanto $L^2(M)$ munido desta norma é um espaço de Hilbert.
Suponha então $M = \mathbb{R}^n$. Podemos assim definir um importante operador chamado de *Transformada de Fourier* como segue:

Definição 1.5. Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a *Transformada de Fourier* de f, $F(f) : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{C}$ é definida por

$$F(f)(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,z>} f(x)dx.$$

Este operador é de fundamental importância para a prova do teorema principal do Capítulo 4, assim como suas propriedades abaixo e os dois teoremas seguintes.

Propriedades 1.1. Destacamos duas propriedades da Transformada de Fourier:

1. Para cada $q = 1, \cdots, n$, temos

$$z_q F(f)(z) = -iF\left(\frac{\partial f}{\partial x_q}\right)(z);$$

2. Para cada $q = 1, \cdots, n$, também vale

$$\frac{\partial}{\partial z_q} F(f_j)(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} x_q f_j e^{i<x,z>}\, dx,$$

ou seja,

$$\nabla F(f)(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} ixf(x) e^{i<x,z>}.$$

Teorema 1.4 (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja* $e_1, e_2, \cdots,$ *uma sequência ortonormal em* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Então para todo* $x \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *vale*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2, \tag{1.9}$$

onde $(\cdot, \cdot)$ *é o produto interno em* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.5. A título de informação podemos trocar $\mathbb{R}^n$ no teorema acima por qualquer espaço H de Hilbert.

Teorema 1.5 (Plancherel)**.** *Seja* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(f)(z)|^2\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx, \tag{1.10}$$

isto é, a Transformada de Fourier deixa invariante a norma em L^2.

1.4 Desigualdades Isoperimétricas

Nesta seção veremos algumas desigualdades isoperimétricas de suma importância as quais ocorrem no Capítulo 4. Para tanto começamos com uma definição.

Seja f uma função mensurável definida em $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$. Daqui em diante vamos denotar $|\Omega| =$ *volume de* Ω e $\omega_n =$ *volume da esfera unitária do espaço euclidiano* n*-dimensional.* Iremos definir a função distribuição de f, $\alpha_f(t)$ ou simplesmente $\alpha(t)$ por

$$\alpha(t) = |\,\{x \in \Omega;\ |f(x)| > t\}\,|.$$

Definição 1.6. A representação esférica decrescente f^* é uma função definida em uma bola B de tal forma que $|B| = |\Omega|$ e o centro de B é tal que f^* depende somente da distância da origem. Além disso, f^* é decrescente ($f^* \downarrow$) e é equimensurável com f, ou seja, f e f^* tem a mesma função distribuição:

$$\alpha(t) = |\,\{x \in \Omega;\ |f(x)| > t\}\,| = |\,\{x \in B;\ |f^*(x)| > t\}\,|,$$

e assim

$$|\,\{x;\ |f^*(x)| > |f^*(r)|\}\,| = \omega_n r^n.$$

Observação 1.6. A função f_* (representação esférica crescente de f) pode ser definida analogamente.

Observação 1.7. Como f^* e f_* são funções que dependem apenas de $r = |x|$, escrevemos $f^*(r)$ e $f_*(r)$.

Listamos abaixo algumas propriedades sobre representações esféricas, seguidas de dois teoremas relevantes para os cálculos que serão feitos no Capítulo 4. Para uma leitura mais profunda sobre estas propriedades recomenda-se [4] e [34]. Sobre resultados relacionados com os dois teoremas seguintes sugerimos [36].

Propriedades 1.2.

1. Se $f = f(r) \geq 0$, $f \downarrow$ (respectivamente $f \uparrow$), então $f^*(r) \leq f(r)$ (respectivamente $f^*(r) \geq f(r)$);

2. Se $f, g \geq 0$, então
$$\int_B f_* g^* \leq \int_B fg \leq \int_B f^* g^*.$$

Teorema 1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira. Então*

$$n\omega_n^{1/n}|\overline{\Omega}|^{\frac{n-1}{n}} \leq |\partial\Omega|. \tag{1.11}$$

Teorema 1.7 (Fórmula da Co-Área)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana com fronteira, tal que $f, |\nabla f| \in L^2(M)$. Então para qualquer função não negativa mensurável h sobre M, vale*

$$\int_M h = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{f=\sigma\}} \frac{h}{|\nabla f|} \right) d\sigma. \tag{1.12}$$

Consideremos Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$. O *momento de inércia* de Ω é definido por

$$I(\Omega) = \min_{a \in \mathbb{R}^n} \int_\Omega |x-a|^2.$$

Fazendo translações de origem e rotações dos eixos de forma adequada, podemos assumir que o centro de massa é a origem, e escrevemos

$$I(\Omega) = \int_\Omega |x|^2.$$

Deste modo, terminamos esta seção com uma importante relação entre o momento de inércia e o volume do domínio em questão.

Propriedade 1.1. Com as mesmas notações acima vale

$$I(\Omega) = \int_\Omega |x|^2 \geq \int_B |x|^2 = \frac{n}{n+2}|\Omega| \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{\frac{2}{n}}. \tag{1.13}$$

1.5 Autovalores de Operadores Elípticos

Tratamos nesta seção o objeto chave do nosso trabalho: autovalores de operadores elípticos. O primeiro operador diferencial para funções em várias variáveis que vem em nosso pensamento, talvez pela frequência em que ele ocorra (devido ao grande número de aplicações), é o operador Laplaciano.

Tomemos então m um número natural. Dizemos que o vetor α é um m-multi-índice se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, onde os α_i's são, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, inteiros não negativos. Escreveremos

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\ldots\partial^{\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}},$$

e $|\alpha| = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|$. Considere $k \in \mathbb{N}$ e L um operador da forma

$$L := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)\partial^\alpha.$$

Dizemos que L é um operador elíptico se

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ com $\xi \neq 0$. Discutiremos a seguir sobre o comportamento dos autovalores para os operadores correspondentes a cada capítulo do trabalho.

1.5.1 Autovalores do operador *h-Laplaciano*

Considere $\Omega \subset M$ um domínio suave limitado, h e V funções suaves sobre $\overline{\Omega}$ tal que V é não negativa. Definimos o *h-Laplaciano* como sendo o operador

$$\Delta_h \cdot = \Delta \cdot - \langle \nabla h, \nabla \cdot \rangle\,, \tag{1.14}$$

onde Δ é o laplaciano usual. Do operador acima podemos definir outro operador um pouco mais geral adicionando a ele a função V dada acima. Temos então as seguintes propriedades bem conhecidas para o operador $-\Delta_h \cdot +V$:

Propriedade 1.2. O primeiro e segundo autovalores λ_1 e λ_2 do operador $-\Delta_h \cdot +V$ satisfazem $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Propriedade 1.3. A primeira e segunda autofunções f_1 e f_2 são ambas suaves sobre $\overline{\Omega}$. Além disso, $f_1 > 0$ e $\int_\Omega f_1 f_2 = 0$.

Observação 1.8. Note que para $V = 0$, $-\Delta_h + V$ torna-se o h-Laplaciano. Para $V = 0$ e $h = 0$ obtemos o operador Laplaciano usual Δ, e quando $h = 0$ e V não necessariamente é a função nula, obtemos o operador de Schrodinger $-\Delta + V$.

1.5.2 Autovalores para o Laplaciano de ordem $l \geq 1$

Dizer que o operador laplaciano é de ordem l significará para nós o mesmo que o laplaciano de uma função calculado l vezes, isto é, estamos falando do operador

$$(\Delta)^l = \underbrace{\Delta\Delta\Delta\cdots\Delta}_{l-vezes}.$$

Começamos com um importante resultado utilizado ao longo do Capítulo 3 a respeito do comportamento dos autovalores e suas autofunções correspondentes para o problema descrito no teorema que segue.

Teorema 1.8. *A respeito dos autovalores do problema de vibração de uma placa com extremidades fixas*

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \rho\Delta u &= z\Gamma u \quad em\ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

onde $\Omega \subset M$ e M é uma variedade Riemanniana compacta com fronteira tal que Ω é um domínio limitado suave, podemos afirmar que

1. *cada autovalor Γ de $\Delta^2 - \rho\Delta$ é real;*
2. *cada autoespaço de cada autovalor tem dimensão finita;*
3. *autoespaços de autovalores distintos são ortogonais;*
4. *$L^2(\Omega)$ é a soma direta de todos os autoespaços;*
5. *(resultado espectral) se repetirmos cada autovalor levando em conta sua multiplicidade, vale*

$$0 < \Gamma_1 < \Gamma_2 \leq \Gamma_3 \leq \cdots \to \infty.$$

Em [18] podemos encontrar algumas versões mais gerais do teorema acima incluindo demonstrações. Para outros fatos sobre autovalores de operadores elípticos, recomendamos também [18], [10] e [6].

De posse do resultado acima é possível obter uma estimativa para autovalores, estimativa esta bem conhecida e chamada de *desigualdade de Rayleigh-Ritz*:

Teorema 1.9 (Desigualdade de Rayleigh-Ritz). *Considere o problema (1.15) e f uma função em $L^2(\Omega)$ tal que $f \neq 0$. Se $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal correspondente a cada autovalor, e além disso, $\langle u_j, f\rangle = 0$ para todo $j = 1, \cdots, k-1$, então vale a estimativa*

$$\lambda_k \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega f(\Delta^2 f - \rho\Delta f)}{\displaystyle\int_\Omega f^2}, \tag{1.16}$$

onde $||f||^2 = \langle f, f\rangle = \displaystyle\int_\Omega f^2$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se f é autofunção de λ_k.

Para demonstração e versões mais gerais acerca da desigualdade de Rayleigh-Ritz recomenda-se [45] e [7].

Aproveitando o momento, podemos também falar de propriedades de autovalores para o operador diferencial do problema abordado no Capítulo 4, a saber

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u &= \lambda(-\Delta)^r u, \ sobre\ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \ldots = \dfrac{\partial^{l-1}u}{\partial\nu^{l-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

onde o produto interno é definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\Delta^r g,$$

e Ω é um domínio conexo limitado em $\mathbb{R}^n$.

Propriedade 1.4. Sobre os autovalores do operador para o problema acima (1.17), temos as propriedades *1–4* análogas às do Teorema 1.8. Quanto a respeito do comportamento dos autovalores, vale ainda (resultado espectral)

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty.$$

Capítulo 2

O primeiro salto dos autovalores do operador h-Laplaciano

Consideraremos λ_1 e λ_2 o primeiro e segundo autovalores do operador

$$-\Delta_h + V = -\Delta + \langle \nabla h, \nabla \rangle + V,$$

com f_1 e f_2 suas respectivas autofunções, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_h f_1 + V f_1 = \lambda_1 f_1 \\ -\Delta_h f_2 + V f_2 = \lambda_2 f_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

sobre um domínio limitado $\Omega \subset M$ (variedade Riemanniana completa) onde V e h são funções suaves dadas sobre $\overline{\Omega}$. Para o operador acima trataremos neste capítulo o caso com condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_h f + V f &= \lambda f, \text{ sobre } \Omega \\ f|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ao operador $\Delta_h = \Delta + \langle \nabla h, \nabla \rangle$ damos o nome de *h-Laplaciano.* Como dito anteriormente, definimos o primeiro salto dos autovalores (ou salto fundamental) para o operador acima como sendo a diferença entre o segundo e primeiro autovalores, ou seja, ao número $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. O objetivo deste capítulo é apresentar uma estimativa inferior para $\lambda_2 - \lambda_1$.

2.1 Resultados auxiliares

Listamos aqui alguns resultados de grande utilidade para este capítulo. Daqui para frente tomamos as notações $u = \dfrac{f_2}{f_1}$ e $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, onde f_1 e f_2 representam a primeira e segunda autofunções do problema (2.2) e $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, com λ_1 e λ_2 como acima.

Observação 2.1. Pelas propriedades (1.2) e (1.3) vistas na seção 1.5.1, faz sentido definir u como acima para $x \in \Omega$, já que $f_1 > 0$ em Ω conforme Propriedade (1.3). Além disso, pela Propriedade (1.2), $\lambda > 0$.

Lema 2.1. *Para todo $x \in \Omega$, vale a expressão*

$$\Delta_h u = -\lambda u - 2\langle \nabla u, \nabla \log f_1 \rangle .$$

Demonstração: Fazendo os cálculos,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \Delta\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\\
&= \frac{1}{f_1}\Delta f_2 + f_2\Delta\left(\frac{1}{f_1}\right) + 2\left\langle \nabla f_2, \nabla\left(\frac{1}{f_1}\right)\right\rangle\\
&= \frac{\Delta f_2}{f_1} - 2\frac{\langle \nabla f_1, \nabla f_2\rangle}{f_1^2} - \frac{f_2}{f_1^2}\Delta f_1 + 2\frac{f_2}{f_1^3}|\nabla f_1|^2\\
&= \frac{1}{f_1^2}(-\lambda_2 f_1 f_2 + \lambda_1 f_1 f_2) + \frac{1}{f_1^2}(f_1\langle \nabla h, \nabla f_2\rangle - f_2\langle \nabla h, \nabla f_1\rangle)\\
&\quad -2\frac{\langle \nabla f_1, \nabla f_2\rangle}{f_1^2} + 2f_2\frac{|\nabla f_1|^2}{f_1^3}\\
&= -\lambda u + \frac{\langle \nabla h, \nabla f_2\rangle}{f_1} - \frac{f_2}{f_1}\langle \nabla f_1, \nabla f_2\rangle + 2f_2\frac{|\nabla f_1|^2}{f_1^3}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\langle \nabla f_1, \nabla f_2\rangle}{f_1^2} - f_2\frac{|\nabla f_1|^2}{f_1^3} = \langle \nabla u, \nabla \log f_1\rangle , \tag{2.3}$$

e

$$\frac{\langle \nabla h, \nabla f_2\rangle}{f_1} - \frac{f_2}{f_1}\langle \nabla h, \nabla f_1\rangle = \langle \nabla h, \nabla u\rangle . \tag{2.4}$$

Substituindo as relações (2.3) e (2.4) na expressão Δu, obtemos

$$\Delta u = \lambda u + \langle \nabla h, \nabla u\rangle - 2\langle \nabla u, \nabla \log f_1\rangle ,$$

conforme desejado. ♦

Continuando, temos o Teorema de Malgrange, o qual nos permitirá afirmar que a função u definida no lema acima satisfaz a condição de Neumann sobre a fronteira do domínio.

Teorema 2.1 (Teorema de Malgrange)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto na vizinhança da origem, $f : U = (t, x) \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que*

$$f(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = 0 \cdots,\ \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}(0,0) = 0, \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0,0) \neq 0.$$

Então na vizinhança da origem podemos escrever f como sendo um produto de uma função suave c que não se anula na origem com uma função suave de t, que é um polinômio de grau k, ou seja

$$f(t,x) = c(t,x)(t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \cdots + a_0(x)).$$

Através do Teorema de Malgrange e do Lema de Hopf, podemos provar a suavidade da função u definida acima e estabelecer uma condição para a sua derivada na direção do vetor normal unitário exterior ao domínio.

Lema 2.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave limitado convexo. Então $u = \dfrac{f_2}{f_1}$ é suave sobre a fronteira de ∂U. Além disso, u satisfaz a condição de fronteira de Neumann.*

Demonstração: Para todo $q \in \partial U$ podemos escolher um sistema local de coordenadas $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ em uma vizinhança V tal que $q \in V \cap \partial U = V \cap \{x_1 = 0\}$. Sabemos que $f_1 > 0$ em U e $f_1 = 0$ sobre ∂U. O Lema de Hopf afirma então que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ sobre ∂U. Lembrando que f_1 é uma função suave sobre a fronteira, restringimos f_1 ao conjunto $V \cap \overline{U}$. Pelo Teorema de Malgrange podemos afirmar, que localmente,

$$f_1 = g_1 \cdot x_1, \text{ para } x \in \overline{U} \cap V,$$

onde $g_1 \neq 0$ e é suave sobre $x \in \overline{U} \cap V$. Por outro lado, também podemos escrever localmente, em $\overline{U} \cap V$

$$f_2 = g_2 \cdot x_1,$$

onde g_2 é uma função suave sobre $\overline{U} \cap V$. Assim, segue de imediato a expressão

$$u = \frac{f_2}{f_1} = \frac{g_2}{g_1},$$

a qual é suave em $\overline{U} \cap V$. Portanto u é suave sobre a fronteira ∂U.

Para provar que u satisfaz a condição de Neumann sobre a fronteira, lembremos que podemos escrever (Lema 2.1)

$$2 \langle \nabla u, \nabla \log f_1 \rangle = -\Delta u - \lambda u + \langle \nabla u, \nabla h \rangle .$$

Por hipótese supomos h suave sobre a fronteira, logo é razoável supor também Δu, $\langle \nabla h, \nabla u \rangle$ e u também suaves sobre a fronteira de maneira que todas estas funções atinjam valores finitos sobre a fronteira. Logo,

$$\langle \nabla u, \nabla \log f_1 \rangle = \frac{1}{f_1} u_1 (f_1)_1 + \frac{1}{f_1} \sum_{i=1}^{k} u_i (f_1)_i$$

atinge valor finito sobre a fronteira. Ao multiplicarmos a equação acima por f_1 obtem-se facilmente

$$f_1 \langle \nabla u, \nabla \log f_1 \rangle - \sum_{i=1}^{k} u_i (f_1)_i = u_1 (f_1)_1.$$

Como $f_1 \equiv 0$ sobre ∂U e x_i, $2 \leq i \leq n$, são vetores tangentes a ∂U, temos $(f_1)_i|_{\partial U} \equiv 0$, para $2 \leq i \leq n$. Isso quer dizer que quando x tende para um ponto $p \in \partial U$, ficaremos com a relação

$$u_1 (f_1) \equiv 0, \text{ sobre } \partial U.$$

Como $f_1 > 0$ sobre a fronteira de U, concluímos o fato de

$$u_1(p) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(p) = 0.$$

Então u satisfaz a condição de Neumann sobre a fronteira de U. ♦

2.2 Uma estimativa inferior para o primeiro salto de autovalores

Nesta seção vamos impor algumas condições sobre os dados do Problema (2.2) a fim de obter uma estimativa inferior para o primeiro salto dos autovalores do problema descrito.

Para Ω como na seção 2.1, definimos

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = 1; \text{ e } \min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = -k.$$

Note que não há problema algum em supor que o máximo da função u em $\overline{\Omega}$ é 1; assim como não há problema em supor $1 \geq k$, caso contrário tomaríamos $-f_2$ ao invés de f_2. Lembrando que $\int_\Omega f_1 f_2 = 0$ e $f_1 > 0$ (Propriedade 1.3, Capítulo 1), segue que $k > 0$. Com estas informações, definimos a função v por

$$v = \left(u - \frac{1-k}{2}\right) \Big/ \left(\frac{1+k}{2}\right), \tag{2.5}$$

e o número a, definido por

$$a = \frac{1-k}{1+k}, \tag{2.6}$$

o qual de imediato satisfaz $0 \leq a < 1$. Isto faz com que $-1 \leq v(x) \leq 1$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Diante da construção acima, segue de imediato o corolário

Corolário 2.1. *Para a função v acima definida vale*

$$\Delta v = -\lambda(v+a) - 2\langle \nabla v, \nabla \log f_1 \rangle + \langle \nabla v, \nabla h \rangle. \tag{2.7}$$

Demonstração: Segue diretamente do Lema 2.1. ♦

Estamos prontos para enunciar o principal teorema deste capítulo

Teorema 2.2. *Seja Ω um domínio limitado convexo com fronteira estritamente convexa (isto significa que a segunda forma fundamental da fronteira é positiva definida) em uma variedade Riemanniana completa M. Considere ainda V e h funções suaves sobre $\overline{\Omega}$. Suponhamos que em Ω*

$$Hessiana\left(\frac{h}{2} - \log f_1\right) \geq \sqrt{\frac{r}{2}} I,\ r > 0 \text{ real.}$$

Se $Ric_{\Omega} \geq -\sqrt{2r}$, *então para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_h f + Vf &= \lambda f, \text{ sobre } \Omega \\ f|_{\partial\Omega} &= 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

vale a estimativa

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{d^2}, \tag{2.9}$$

onde d *é o diâmetro de* Ω.

Para provar o teorema acima começamos com uma proposição, seguida de um teorema e de três lemas. Iniciamos com

Proposição 2.1. *Considere* Ω *e* $\partial\Omega$ *como no Teorema 2.2. Seja* $z(v)$ *uma função suave sobre* $\overline{\Omega}$. *Suponha que*

$$G(x) = |\nabla v|^2 + z(v),$$

$\max\limits_{x\in\bar{\Omega}} G(x) = G(p)$ *e* $p \in \partial\Omega$. *Então* $\nabla v(p) = 0$.

Demonstração: Escolha um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n = \nu\}$ em uma vizinhança de p. Como p é um ponto de máximo de G,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial G}{\partial \nu}(p) &= 2\sum_{i=1}^{n} v_i v_{i\nu} + z' v_\nu \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} v_i v_{i\nu}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pela definição de Hessiana, em p teremos

$$\begin{aligned} v_{i\nu} &= e_i \nu v - (\nabla^{\nu}_{e_i})v \\ &= -(\nabla^{\nu}_{e_i})v, \end{aligned} \tag{2.11}$$

e pela segunda forma fundamental de $\partial\Omega$

$$v_{i\nu} = -\sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} v_j \ , \tag{2.12}$$

obtendo finalmente

$$0 \leq -2\sum_{i,j=1}^{n-1} v_i h_{ij} v_j \leq 0.$$

Como $\partial\Omega$ é estritamente convexa, concluímos que $v_i(p) = 0$, $1 \leq i \leq n$, como desejado. ♦

Utilizando a proposição acima conseguimos uma estimativa para o gradiente da função v.

Teorema 2.3. *Considere Ω e $\partial\Omega$, como no Teorema 2.2. Então, para $x \in \overline{\Omega}$, temos*

$$|\nabla v|^2 + \lambda(1+a)v^2 \leq \lambda(1+a).$$

Demonstração: Para $\epsilon > 0$, consideramos a função $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = |\nabla v|^2 + [\lambda(1+a) + \epsilon]v^2.$$

Se F atinge seu máximo em um ponto p da fronteira de Ω, pela Proposição 2.1 teríamos $\nabla v(p) = 0$, e logo

$$F(x) \leq F(p) = [\lambda(1+a) + \epsilon]v^2(p) \leq \lambda(1+a) + \epsilon, \text{ pois } v \leq 1.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos um dos casos do teorema.
Por outro lado, se $p \in \overset{\circ}{\Omega}$, teremos duas possibilidades a verificar:
Caso 1: Se $|\nabla v|(p) = 0$, o resultado segue de imediato.
Caso 2: Se $|\nabla v|(p) \neq 0$, como p é ponto de máximo

$$\begin{cases} \nabla F(p) = 0 \\ \Delta F(p) \leq 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Denotando por $A = \lambda(1+a) + \epsilon$, teremos

$$0 = F_i(p) = 2(\sum_{j=1}^{n} v_j v_{ji} + Avv_i). \tag{2.14}$$

Escolhendo um referencial apropriado $\{e_i\}_{i=1}^n$ satisfazendo

$$\begin{cases} v_1(p) \neq 0 \\ v_i(p) = 0, \ 2 \leq i \leq n, \end{cases}$$

a equação (2.14) nos fornece

$$v_{11} = -Av. \tag{2.15}$$

Por outro lado, pela Fórmula de Bochner

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Delta F &= |\nabla^2 v|^2 + \langle \nabla v, \nabla(\Delta v)\rangle + Ric(\nabla v, \nabla v) + Av\Delta v + A|\nabla v|^2 \\
&= |\nabla^2 v|^2 + \langle \nabla v, \nabla(-\lambda(v+a) + \langle \nabla h, \nabla v\rangle - 2\langle \nabla v, \nabla \log f_1\rangle)\rangle \\
&\quad + Ric(\nabla v, \nabla v) + Av(-\lambda(v+a) + \langle \nabla h, \nabla v\rangle - 2\langle \nabla v, \nabla \log f_1\rangle) + A|\nabla v|^2 \\
&= |\nabla^2 v|^2 - \lambda|\nabla v|^2 + \langle \nabla v, \nabla(\langle \nabla h, \nabla v\rangle)\rangle - 2\langle \nabla v, \nabla(\langle \nabla v, \nabla \log f_1\rangle)\rangle \\
&\quad + Ric(\nabla v, \nabla v) - \lambda A v(v+a) + Av\langle \nabla h, \nabla v\rangle - 2Av\langle \nabla v, \nabla \log f_1\rangle + A|\nabla v|^2.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Utilizando (2.15) conseguimos calcular algumas expressões úteis em p:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla v, \nabla(\langle \nabla h, \nabla v\rangle)\rangle &= \langle \nabla v, \nabla(h_1 v_1)\rangle \\
&= v_1^2 h_{11} + v_1 h_1 v_{11} \\
&= v_1^2 h_{11} - Avv_1 h_1;
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla v, \nabla(\langle \nabla v, \nabla \log f_1\rangle)\rangle &= \langle \nabla v, \nabla(v_1(\log f_1)_1)\rangle \\
&= v_1^2(\log f_1)_{11} + v_1 v_{11}(\log f_1)_1 \\
&= v_1^2(\log f_1)_{11} - Avv_1(\log f_1)_1;
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
|\nabla^2 v|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij}^2 \\
&\geq v_{11}^2 \\
&= A^2 v^2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Substitua (2.17), (2.18) e (2.19) em (2.16) e utilize a hipótese do Teorema 2.2

$$h_{11} - 2(\log f_1)_{11} \geq \sqrt{2r}.$$

Feito isto, obteremos

$$\begin{aligned}
0 \geq \tfrac{1}{2}\Delta F(p) &\geq A^2 v^2 + (A-\lambda)|\nabla v|^2 + v_1^2 h_{11} - Avv_1 h_1 - 2v_1^2(\log f_1)_{11} + 2Avv_1(\log f_1)_1 \\
&\quad + Ric(\nabla v, \nabla v) - \lambda A v(v+a) + Avv_1 h_1 - 2Avv_1(\log f_1)_1 \\
&= A^2 v^2 + (A-\lambda)|\nabla v|^2 - \lambda A v(v+a) + Ric(\nabla v, \nabla v) + \sqrt{2r}|\nabla v|^2 \\
&\geq (A-\lambda)F(p) - \lambda A a v.
\end{aligned}$$

Assim

$$F(p) \leq \frac{\lambda A a v}{A-\lambda} \leq \lambda(1+a) + \epsilon,$$

pois $-1 \leq v \leq 1$.

Finalmente

$$F(x) \leq F(p) \leq \lambda(1+a) + \epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ conluímos a demonstração do teorema. ♦

Neste momento, o teorema acima nos permite fazer a estimativa

$$\begin{aligned} |\nabla v|^2 &\leq \lambda(1+a)(1-v^2) \\ &\leq \lambda(1+a)(b^2-v^2), \end{aligned} \tag{2.20}$$

para qualquer $b > 1$. Logo

$$\frac{|\nabla v|^2}{(b^2 - v^2)} \leq \lambda(1+a). \tag{2.21}$$

Se $a > 0$, definimos $t : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por $t(x) = arcsen\left(\frac{v(x)}{b}\right)$, onde $arcsen\left(\frac{-1}{b}\right) \leq t \leq arcsen\left(\frac{1}{b}\right)$. Portanto

$$\frac{|\nabla v|^2}{1-(v/b)^2} = |\nabla t|^2 \leq \lambda(1+a).$$

Considere $H : [arcsen(-1/b), arcsen(1/b)] \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(t_0) = \max_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ t(x) = t_0}} \frac{|\nabla(v/b)|^2}{1-(v/b)^2}(x).$$

Veja que H é contínua e para todo $t_0 \in [arcsen(-1/b), arcsen(1/b)]$, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que

$$t(x_0) = t_0 \quad \text{e} \quad H(t_0) = \frac{|\nabla(v/b)|^2}{1-(v/b)^2}(x_0).$$

Para $a > 0$ podemos definir uma função contínua $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$H(t) \equiv \lambda\left(1 + \frac{a}{b}\varphi(t)\right), \quad \varphi(t) \leq b. \tag{2.22}$$

O foco agora é procurar uma função ψ que satisfaça $\varphi \leq \psi$ de modo a tornar a estimativa para o gradiente da função v, obtida no Teorema 2.3, uma estima mais simples. Isto quer dizer que vamos encontrar uma função ψ de modo a deixar os cálculos futuros fáceis de se manipular.

Lema 2.3. *Seja* $y : [arcsen(-1/b), arcsen(1/b)] \to \mathbb{R}$ *uma função* C^∞ *satisfazendo*

(i) *$y(t) \geq \varphi(t)$, $t \in [arcsen(-1/b), arcsen(1/b)]$;*

(ii) *existe um $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $t(x_0) = t_0$ e $y(t_0) = \varphi(t_0)$;*

(iii) *$y(t) \geq -1$ para todo $t \in [arcsen(-1/b), arcsen(1/b)]$;*

(vi) *$y'(t_0) \geq 0$.*

Então a seguinte desigualdade é válida

$$\varphi(t_0) \leq sen(t_0) - y'(t_0)\, sen(t_0)\, cos(t_0) + \frac{1}{2} y''(t_0)\, cos^2(t_0).$$

Demonstração: Considere a função $J : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$J(x) = \left\{ \frac{|\nabla v|^2}{b^2 - v^2} - \lambda(1 + cy) \right\} cos^2 t = \frac{|\nabla v|^2}{b^2} - \lambda(1 + cy)\, cos^2 t,$$

onde $b > 1$ e $c = a/b$. Observe que $J(x_0) = 0$ e $J(x) \leq 0$. Assim x_0 é ponto de máximo de J, ou seja,

$$\nabla J(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \Delta J(x_0) \leq 0.$$

Observe inicialmente que $\nabla v(x_0) \neq 0$, caso contrário teríamos

$$0 = J(x_0) = -\lambda(1 - (v/b)^2)(1 + cy)|_{x_0},$$

resultando em

$$y(x_0) = -1/c = -b/a < -1$$

o que contradiz (iii). Então $\nabla v(x_0) \neq 0$. Pela Proposição 2.1 $x_0 \notin \partial\Omega$, ou seja, $x_0 \in \Omega$. De $\nabla J(x_0) = 0$, temos que em x_0

$$0 = J_j(x_0) = \frac{2}{b^2} \sum_i v_i v_{ij} - \lambda c y'\, cos^2 t\; t_j + 2\lambda(1 + cy)\, cost\; sent\; t_j$$

isto é,

$$\frac{2}{b^2} \sum_i v_i v_{ij}|_{x_0} = \lambda[c y'\, cos^2 t - 2(1 + cy)\, cost\; sent] t_j|_{x_0}. \tag{2.23}$$

Ainda

$$\begin{aligned}\Delta J &= \frac{2}{b^2}|\nabla^2 v|^2 + \frac{2}{b^2}\langle \nabla v, \nabla(\Delta v)\rangle + \frac{2}{b^2} Ric(\nabla v, \nabla v) - \lambda c\, cos^2 t\, \Delta y \\ &\quad -\lambda(1+cy)\Delta(cos^2 t) - 2\lambda c\langle \nabla y, \nabla cos^2 t\rangle \\ &= \frac{2}{b^2}|\nabla^2 v|^2 + \frac{2}{b^2}\langle \nabla v, \nabla(\Delta v)\rangle + \frac{2}{b^2} Ric(\nabla v, \nabla v) - \lambda c\, cos^2 t\,[y''|\nabla t|^2 + y'\Delta t] \\ &\quad -\lambda(1+cy)\Delta\, cos^2 t + 4\lambda c y'\, cost\, sent|\nabla t|^2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Mas como $\nabla v(x_0) \neq 0$, escolhemos um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ tal que

$$\begin{cases} v_1(x_0) & \neq & 0 \\ v_i(x_0) & = & 0, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Lembrando que $t = arcsen(v/b)$, temos $|\nabla t|^2 = \dfrac{|\nabla v|^2}{cos^2 t\; b^2}$. Logo em x_0 a equação (2.23) fica

$$v_{11} = \frac{b}{2}\lambda[cy'\, cost - 2(1+cy)\, sent]. \tag{2.25}$$

Da equação acima estimamos a hessiana da função v em x_0

$$\begin{aligned}\frac{2}{b^2}\sum_{i,j=1}^{n} v_{ij}^2 &\geq \frac{2}{b^2} v_{11}^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{2}[cy'\, cost - 2(1+cy)sent]^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{2}c^2(y')^2 cos^2 t - 2\lambda^2 c y'\, cost\, sent(1+cy) + 2\lambda^2(1+cy)^2 sen^2 t.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Separadamente, também conseguimos estimar

$$\begin{aligned}\langle \nabla v, \nabla(\Delta v)\rangle|_{x_0} &= \langle \nabla v, \nabla(-\lambda(v+a) + \langle \nabla h, \nabla v\rangle - 2\langle \nabla \log f_1, \nabla v\rangle)\rangle \\ &= -\lambda v_1^2 + v_1^2 h_{11} + v_1 v_{11} h_1 - 2v_1 v_{11}(\log f_1)_1 - 2v_1^2(\log f_1)_{11} \\ &\geq -\lambda v_1^2 + v_1 v_{11} h_1 - 2 v_1 v_{11}(\log f_1)_1 + \sqrt{2r}\, v_1^2,\end{aligned} \tag{2.27}$$

lembrando que $(h - 2\,\log f_1)_{11} \geq \sqrt{2r}$. Calculando outras expressões que nos serão úteis

$$\Delta(v/b) = \Delta(sent) = cost\Delta t - sent|\nabla t|^2, \tag{2.28}$$

$$\Delta t = \left[\Delta v/b + sent|\nabla t|^2\right]\frac{1}{cost}, \tag{2.29}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \cos^2 t &= \Delta\left(1-\frac{v^2}{b^2}\right) \\
&= -2\frac{v}{b^2}\Delta v - 2\frac{v}{b^2}|\nabla v|^2 \\
&= -2\frac{v}{b^2}\Delta v - 2\ cos^2 t\ |\nabla t|^2.
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Em x_0, $J(x_0)=0$, e daí

$$
\lambda(1+cy)|_{x_0} = \frac{|\nabla v|^2}{b^2-v^2}(x_0) = |\nabla t|^2, \tag{2.31}
$$

obtendo

$$
b^2\ cos^2 t\lambda(1+cy) = |\nabla v|^2. \tag{2.32}
$$

Substituindo as equações (2.26)-(2.32) em (2.24), lembrando ainda que $\Delta J(x_0)\le 0$, temos

$$
\begin{aligned}
0 \ \geq\ & \Delta J(x_0) \\
\geq\ & \frac{2}{b^2}|\nabla^2 v|^2 + \frac{2}{b^2}\left[-\lambda v_1^2 + v_1 v_{11} h_1 - 2v_1 v_{11}(\log f_1)_1\right] + \frac{2}{b^2} Ric(\nabla v, \nabla v) \\
& + \frac{2}{b^2}\sqrt{2r}|\nabla v|^2 - \lambda c\ cos^2 t\left[y''\lambda(1+cy) + y'\left(\frac{\Delta v}{b\ cost} + \frac{sent}{cost}\lambda(1+cy)\right)\right] \\
& + 2\lambda(1+cy)\left[\frac{v}{b^2}\Delta v + cos^2 t\lambda(1+cy)\right] + 4\lambda^2 cy'\ cost\ sen(1+cy) \\
\geq\ & \frac{2}{b^2}|\nabla^2 v|^2 - \frac{2\lambda}{b^2}v_1^2 + \frac{2}{b^2}v_1 v_{11} h_1 - \frac{4}{b^2}v_1 v_{11}(\log f_1)_1 - \lambda^2 cy''(1+cy)cos^2 t \\
& + \frac{\lambda c}{b}y'\ cost[\lambda(v+a) + h_1 v_1 + 2v_1(\log f_1)_1] - \lambda^2 cy'(1+cy)sent\ cost \\
& + \frac{2\lambda}{b}(1+cy)sent[-\lambda(v+a) + h_1 v_1 - 2v_1(\log f_1)_1] + 2\lambda^2(1+cy)^2 cos^2 t \\
& + 4\lambda^2 cy'\ cost\ sent(1+cy)
\end{aligned}
$$

$$\geq \frac{\lambda^2}{2}c^2(y')^2cos^2t - 2\lambda^2cy'cost\ sent(1+cy) + 2\lambda^2(1+cy)^2sen^2t - 2\frac{\lambda}{b^2}v_1^2$$

$$+\frac{1}{b}v_1h_1\lambda[cy'cost - 2(1+cy)sent] - \frac{2}{b}v_1(\log f_1)_1\lambda[cy'cost - 2(1+cy)sent]$$

$$-\lambda^2cy''(1+cy)cos^2t + \frac{\lambda c}{b}y'\ cost[\lambda(v+a) + h_1v_1 + 2v_1(\log f_1)_1]$$

$$-\lambda^2cy'(1+cy)sent\ cost + \frac{2\lambda}{b}(1+cy)sent[-\lambda(v+a) + h_1v_1 - 2v_1(\log f_1)_1]$$

$$+2\lambda^2(1+cy)^2cos^2t + 4\lambda^2cy'\ cost\ sent(1+cy).$$

Desta forma, a estimativa para o lapalciano de J em x_0 nos fornece

$$\begin{aligned} 0 \ \geq\ & -\lambda^2cy''\ cos^2t(1+cy) - 2\lambda^2(1+cy) - 2\lambda^2c(1+cy)sent \\ & +\lambda^2cy'\ cost(sent+c) + 2\lambda^2(1+cy)^2 + \lambda^2cy'\ sent\ cost(1+cy), \end{aligned}$$

e dividindo os dois lados da inequação por $\lambda^2c(1+cy)|_{x_0} > 0$,

$$0 \geq -y''\ cos^2t + y'\left[cost\ sent + cost\frac{sent+c}{1+cy}\right] + 2y - 2\ sent.$$

Para finalizar a prova do lema, observe que

$$-1 \leq y(t_0) = \varphi(t_0) \leq b, \quad \text{então} \quad |y(t_0)| \leq b.$$

Assim

$$c \geq y(t_0)\ sent_0, \quad c + sent_0 \geq sent_0(1+cy), \quad \frac{c+sent_0}{1+cy} \geq sent_0.$$

Por hipótese $y'(t_0) \geq 0$, e finalmente concluímos o lema

$$y(t_0) = \varphi(t_0) \leq sen(t_0) - y'(t_0)\ sen(t_0)\ cos(t_0) + \frac{1}{2}y''(t_0)\ cos^2(t_0).$$

♦

O próximo passo é enunciar o lema que segue, cujo objetivo é servir como ferramenta para o lema posterior:

Lema 2.4. *Defina* $\psi : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ *por*

$$\begin{cases} \psi(t) = \dfrac{(4/\pi)(t + cost\ sent) - 2\ sent}{cos^2 t}, & t \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \\ \psi(-\pi/2) = -1, \quad \psi(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

Então ψ *é* C^∞ *em* $(-\pi/2, \pi/2)$, *contínua sobre* $[-\pi/2, \pi/2]$ *e ainda,* $y = \psi(t)$ *satisfaz* $y'(t) \geq 0$ *para* $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, *com*

$$y - sent + y'\ sent\ cost - \frac{1}{2} y''\ cos^2 t = 0.$$

Demonstração: Ver [46]. ♦

Lema 2.5. *Seja* φ *a função definida em (2.22) e* ψ *como no Lema 2.4. Então*

$$\varphi(t) \leq \psi(t), \quad t \in [arcsen(-1/b), arcsen(1/b)].$$

Demonstração: Suponha por contradição que

$$\sigma = \varphi(t_0) - \psi(t_0) = \max_t \{\varphi(t) - \psi(t)\} > 0.$$

Se escolhermos $\psi(t) + \sigma = \tilde{y}$, é fácil ver que $\tilde{y} = y$ satisfaz todas as condições do Lema 2.3. Logo teríamos

$$\varphi(t_0) = \tilde{y}(t_0) = \psi(t_0) + \sigma \leq sent_0 - \psi'(t_0)\ sent_0\ cost_0 + \frac{1}{2}\psi''(t_0)\ cos^2 t_0 = \psi(t_0),$$

o que é absurdo. ♦

Estamos agora aptos para provar o Teorema 2.2:

Demonstração do Teorema 2.2: Para todo $x \in \overline{\Omega}$ e para qualquer $b > 1$, por (2.21) temos

$$|\nabla v|^2 \leq \lambda(1 + a)(1 - v^2) \leq \lambda(1 + a)(b^2 - v^2),$$

e portanto

$$\frac{|\nabla v|}{\sqrt{b^2 - v^2}} \leq \lambda^{1/2}(1 + a)^{1/2.} \tag{2.33}$$

Suponha agora q_1 e $q_2 \in \bar{\Omega}$ tais que $v(q_1) = 1$, $v(q_2) = -1$, e γ a curva de menor comprimento ligando q_1 a q_2. Integrando (2.33) ao longo de γ,

$$\lambda \geq \frac{1}{(1+a)} \frac{\pi^2}{d^2}.$$

Quando $a = 0$ o teorema segue de imediato. A fim de provar o caso $a > 0$, pelo Lema 2.5 temos que

$$|\nabla t|^2 = \frac{|\nabla v|^2}{b^2 - v^2} \leq \lambda \left(1 + \frac{a}{b}\psi(t)\right). \tag{2.34}$$

Verifica-se facilmente ainda os fatos $\psi(0) = 0$ e $-\psi(t) = \psi(-t)$. Como $|\pm a/b\psi(t)| \leq 1$, calculamos

$$\frac{1}{\sqrt{1+(a/b)\psi(t)}} + \frac{1}{\sqrt{1-(a/b)\psi(t)}} = 2\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4k-1)}{2k!\; 2^{2k}} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \psi(t)^{2k}\right] \geq 2.$$

Integrando (2.34) (como no caso $a = 0$), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda^{1/2} d \quad &\geq \int_{\arcsin -1/b}^{\arcsin 1/b} \frac{dt}{\sqrt{1+(a/b)\psi(t)}} \\
&= \int_{0}^{\arcsin 1/b} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(a/b)\psi(t)}} + \frac{1}{\sqrt{1-(a/b)\psi(t)}}\right) dt \\
&= 2\arcsin\left(\frac{1}{b}\right).
\end{aligned}$$

Tomando o limite $b \to 1$, conluímos que $\lambda \geq \dfrac{\pi^2}{d^2}$, como queríamos. ♦

2.2.1 Outra estimativa para o primeiro salto

Faremos aqui outras considerações acerca das hipóteses da estimativa apresentada acima. Para isto, enunciamos antes alguns resultados já existentes e que facilitarão a obtenção de outra estimativa.

Suponha ainda o Problema (2.2) com a função $V \equiv 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave limitado e convexo.

Proposição 2.2 (Li Ma e Baiyu Liu [29]). *Considere h uma função suave côncava sobre $\overline{\Omega}$ e*

$$g = \frac{1}{4}(2\Delta h - |\nabla h|^2)$$

uma função côncava sobre $\overline{\Omega}$ com $\partial\Omega$ suave. Seja f_1 a primeira autofunção do problema (2.2) sobre as considerações acima, isto é

$$-\Delta f_1 + \nabla h \cdot \nabla f_1 = \lambda_1 f_1$$

em Ω com $f_1|_{\partial\Omega} = 0$. Então a função $-\log f_1$ é convexa em Ω.

Observação 2.2. Na demonstração da proposição acima os autores conseguem também provar que a função $w = -\log f_1 + \dfrac{h}{2}$ é convexa, ou seja,

$$Hess\left(-\log f_1 + \frac{h}{2}\right) \geq 0. \tag{2.35}$$

Com base na proposição acima, ainda com as mesmas notações como no Teorema 2.2, podemos enunciar o teorema

Teorema 2.4. *Considere $\Omega \subset M$ um domínio limitado convexo e suave, onde M é uma variedade Riemanniana completa tal que $Ric_\Omega \geq 0$, e a fronteira $\partial\Omega$ seja estritamente convexa. Considere o problema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta f &=& \lambda f - \langle \nabla f, \nabla h \rangle\,,\ \textit{sobre}\ \Omega \\ f|_{\partial\Omega} &=& 0 \end{array}\right. . \tag{2.36}$$

Se

$$Hess\left(-\log f_1 + \frac{h}{2}\right) \geq 0,$$

então

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{d^2}.$$

Demonstração: A demonstração deste teorema é praticamente análoga à demonstração do Teorema 2.2. Observamos de começo que vale

$$-\Delta v = -\lambda(v + a) - 2\,\langle \nabla v, \nabla \log f_1 \rangle + \langle \nabla v, \nabla h \rangle$$

para a função v definida no início da seção 2.2. Cálculos idênticos também mostram a Proposição 2.1. Neste caso vale a mesma estimativa para o gradiente da função v exibida no Teorema 2.3. Os cálculos para este caso são feitos de forma análoga como na demonstração do Teorema 2.3, observadas as novas hipóteses:

$$Ric_\Omega \geq 0;\ Hess\left(-\log f_1 + \frac{h}{2}\right) \geq 0.$$

O mesmo vale também para o Lema 2.3. Na hora de computarmos os cálculos sobre as novas hipóteses obtemos a mesma inequação. Feito isso, os lemas 2.4 e 2.5 seguem de imediato. Para finalizar, a demonstração do Teorema 2.4 faz-se da mesma maneira da demonstração do Teorema 2.2. ♦

Observação 2.3. Se $M = \mathbb{R}^n$, tomando h como na Proposição 2.2, teríamos $Ric_\Omega = 0$ e $Hess\left(-\log f_1 + \frac{h}{2}\right) \geq 0$, e portanto

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{d^2}.$$

Em [29] Li Ma e Baiyu Liu provaram sob estas condições a estimativa

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{4d^2}.$$

Isto significa que a estimativa apresentada no Teorema 2.4 é melhor do que a estimativa em [29], além de generalizar as hipóteses consideradas.

Capítulo 3

Desigualdade Universal para autovalores do problema de vibração de uma placa com extremidades fixas

Tratamos neste capítulo com outro tipo de estimativa para autovalores envolvendo outro tipo de problema. Para sermos mais claros, seja M uma variedade Riemanniana completa e Ω um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ em M. Encontramos aqui uma estimativa universal para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \rho\Delta u & = & z\Gamma u \ \text{ em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} & = & \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde ν é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$, Δ o Laplaciano de M, $z > 0$ uma função definida em Ω e ρ uma constante não negativa.

Iniciamos a primeira seção deste capítulo exibindo uma desigualdade universal para o Problema (3.1).

3.1 Uma desigualdade universal

Como prometido, começamos enunciando o

Teorema 3.1. *Seja Γ_i o i-ésimo autovalor do problema (3.1). Considere ainda u_i a autofunção ortonormal correspondente a Γ_i, ou seja, u_i satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta^2 u_i - \rho\Delta u_i = z\Gamma_i u_i \ \ em\ \Omega, \\ u_i|_{\partial\Omega} = \left.\dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \\ \displaystyle\int_\Omega u_i u_j = \delta_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots. \end{cases} \tag{3.2}$$

Então, para qualquer $h \in C(\Omega) \cap C^3(\partial\Omega)$ e qualquer inteiro k, temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega hu_i \left(\Delta(u_i\Delta h) + 2\Delta\left\langle \nabla h, \nabla u_i\right\rangle + 2\left\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\right\rangle + \Delta h \Delta u_i\right. \\ &\left. -\rho(u_i\Delta h + 2\left\langle \nabla h, \nabla u_i\right\rangle)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \left\| z^{-1}\left(\Delta(u_i\Delta h) + 2\Delta\left\langle \nabla h, \nabla u_i\right\rangle + 2\left\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\right\rangle + \Delta h \Delta u_i\right.\right. \\ &\left.\left. -\rho(u_i\Delta h + 2\left\langle \nabla h, \nabla u_i\right\rangle)\right)\right\|^2; \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega (-hu_i^2\Delta h - 2hu_i\left\langle \nabla h, \nabla u_i\right\rangle) \\ &\leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega \{hu_i(\Delta(u_i\Delta h) + 2\Delta\left\langle \nabla h, \nabla u_i\right\rangle + 2\left\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\right\rangle + \Delta h\Delta u_i \\ &-\rho(u_i\Delta h + 2\left\langle \nabla h, \nabla u_i\right\rangle))\} + \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)\left\| z^{-1}\left(\left\langle \nabla h, \nabla u_i\right\rangle + u_i\frac{\Delta h}{2}\right)\right\|^2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde δ é qualquer constante positiva e

$$\| f \|^2 = \int_\Omega z f^2.$$

Demonstração: Para $i = 1, \ldots, k$, consideramos funções $\phi_i : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi_i = hu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j,$$

onde

$$a_{ij} = \int_\Omega hzu_i u_j = a_{ji}.$$

Pela equação (3.2) e da definição de ϕ_i, de imediato segue que

$$\phi_i|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

e ainda

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi_j u_i z &= \int_\Omega (hu_j - \sum_{l=1}^{k} a_{jl} u_l) u_i z \\ &= a_{ij} - a_{ji} = 0, \end{aligned}$$

isto é, $\phi_i \perp u_j$ para todo $i, j = 1, \ldots, k$. Pela desigualdade de Rayleigh-Ritz (ver Capítulo 1, equação (1.16)), podemos escrever

$$\Gamma_{k+1} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega \phi_i(\Delta^2 \phi_i - \rho \Delta \phi_i)}{\displaystyle\int_\Omega z\phi_i^2}. \tag{3.5}$$

Então calculamos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \phi_i(\Delta^2 \phi_i - \rho \Delta \phi_i) \\ &= \int_\Omega \phi_i \left\{ \Delta[\Delta(hu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j)] - \rho \Delta(hu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j) \right\} \\ &= \int_\Omega \phi_i \left\{ \Delta[h\Delta u_i + u_i \Delta h - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j + 2\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle] \right. \\ &\quad \left. -\rho(h\Delta u_i + u_i \Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \Delta u_j) \right\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$= \int_\Omega \phi_i \Big\{ \Delta h \Delta u_i + h\Delta^2 u_i + 2\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\rangle + \Delta(u_i \Delta h) - \sum_{j=1}^k a_{ij}\Delta^2 u_j$$

$$-\rho(u_i\Delta h + h\Delta u_i + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle - \textstyle\sum_{j=1}^k a_{ij}\Delta u_j) + 2\Delta\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle \Big\}$$

$$= \int_\Omega \phi_i \left\{ \Delta h \Delta u_i + h(\Delta^2 u_i - \rho\Delta u_i) + 2\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\rangle + 2\Delta\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^k a_{ij}(\Delta^2 u_j - \rho\Delta u_j) + \Delta(u_i\Delta h) - \rho(u_i\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle) \right\} \tag{3.7}$$

$$= \int_\Omega \phi_i \left\{ \Delta(u_i\Delta h) + 2\Delta\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle + 2\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\rangle + \Delta h\Delta u_i \right.$$

$$\left. -\rho(u_i\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle) + zh\Gamma_i u_i \right\}$$

$$= \Gamma_i \int_\Omega z\phi_i^2 + \int_\Omega h u_i[\Delta(u_i\Delta h) + 2\Delta\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle + 2\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\rangle + \Delta h\Delta u_i$$

$$-\rho(u_i\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle)] - \sum_{j=1}^k a_{ij}b_{ij},$$

onde

$$b_{ij} = \int_\Omega u_j \left\{ \Delta(u_i\Delta h) + 2\Delta\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle + 2\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\rangle \Delta h\Delta u_i - \rho(u_i\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle) \right\}. \tag{3.8}$$

Utilizando o fato

$$\begin{aligned} \int_\Omega z\phi_i^2 &= \int_\Omega z\phi_i(hu_i - \sum_{j=1}^k a_{ij}u_j) \\ &= \int_\Omega zh\phi_i u_i, \end{aligned} \tag{3.9}$$

podemos estimar b_{ij} da seguinte forma:

$$\int_\Omega u_j[\Delta(\Delta u_i \Delta h) + 2\Delta \langle \nabla h, \nabla u_i\rangle + 2\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\rangle + \Delta h \Delta u_i]$$

$$= \int_\Omega \Delta u_j[u_i\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle] - 2\int_\Omega \Delta u_i \; div(u_j \nabla h) + \int_\Omega u_j(\Delta u_i)(\Delta h)$$

$$= \int_\Omega \Delta u_j[u_i\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle] - \int_\Omega \Delta u_i[u_j\Delta h + 2\langle \nabla u_j, \nabla h\rangle] \tag{3.10}$$

$$= \int_\Omega \Delta u_j \Delta(u_i h) - \int_\Omega \Delta u_i \Delta(h u_i)$$

$$= \int_\Omega u_i h \Delta^2 u_j - \int_\Omega h u_j \Delta^2 u_i;$$

e também

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (u_i\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle)\, u_j &= -\int_\Omega h\Delta(u_i u_j) + 2\int_\Omega h\; div(u_j \nabla u_i) \\ &= \int_\Omega (h u_j \Delta u_i - h u_i \Delta u_j)\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

De (3.10) e (3.11) concluímos que

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \int_\Omega \left(u_i h \Delta^2 u_j - h u_j \Delta^2 u_i\right) - \rho \int_\Omega (h u_j \Delta u_i - h u_i \Delta u_j) \\ &= \Gamma_j \int_\Omega z h u_i u_j - \Gamma_i \int_\Omega z h u_i u_j \\ &= (\Gamma_j - \Gamma_i) a_{ij} \\ &= -b_{ji}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por outro lado, definindo

$$q_i(h) = \Delta(u_i\Delta h) + 2\Delta\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle + 2\langle \nabla h, \nabla(\Delta u_i)\rangle + \Delta h \Delta u_i - \rho(u_i \Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla u_i\rangle), \tag{3.13}$$

vemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi_i q_i(h) &= \int_\Omega h u_i q_i(h) - \sum_{j=1}^k a_{ij} b_{ij} \\ &= \int_\Omega h u_i q_i(h) + \sum_{j=1}^k (\Gamma_i - \Gamma_j) a_{ij}^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Logo, da desigualdade de Rayleigh-Ritz (3.5) e da expressão (3.14), podemos escrever

$$(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \int_\Omega z\phi_i^2 \leq \int_\Omega \phi_i q_i(h). \tag{3.15}$$

Assim

$$\begin{aligned}
&(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \left(\int_\Omega \phi_i q_i(h) \right)^2 \\
&= (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \left(\int_\Omega z^{1/2}\phi_i \left(z^{-1/2} q_i(h) - \sum_{j=1}^{k} z^{1/2} u_j \right) \right)^2 \\
&\leq (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \left(\int_\Omega z\phi_i^2 \right) \left(\int_\Omega \left(z^{-1/2} q_i(h) - \sum_{j=1}^{k} z^{1/2} u_j \right)^2 \right) \\
&= \left(\int_\Omega \phi_i q_i(h) \right) \left(\int_\Omega z^{-1} q_i(h)^2 - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij} q_i(h) u_j + \left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij} u_j \right)^2 z \right) \\
&\leq \left(\int_\Omega \phi_i q_i(h) \right) \left(\int_\Omega \left(z^{-1} q_i(h)^2 \right) - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2 \right) \\
&= \left(\int_\Omega \phi_i q_i(h) \right) \left(\|z^{-1} q_i(h)\|^2 - \sum_{j=1}^{k} (\Gamma_i - \Gamma_j)^2 a_{ij}^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto

$$(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \left(\int_\Omega \phi_i q_i(h) \right) \leq \left\| z^{-1} q_i(h) \right\|^2 - \sum_{j=1}^{k} (\Gamma_i - \Gamma_j)^2 a_{ij}^2. \tag{3.17}$$

Multiplique agora (3.14) por $(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2$ e some em i, com i variando de 1 a k:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega \phi_i q_i(h) &= \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega h u_i q_i(h) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega h u_i q_i(h) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 (\Gamma_i - \Gamma_j) a_{ij}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega h u_i q_i(h) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) (\Gamma_i - \Gamma_j)^2 a_{ij}^2,\end{aligned} \tag{3.18}$$

e então por (3.17), teremos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega h u_i q_i(h) - \sum_{i,j=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) (\Gamma_i - \Gamma_j)^2 a_{ij}^2 \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \|z^{-1} q_i(h)\|^2 - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) (\Gamma_i - \Gamma_j)^2 a_{ij}^2,\end{aligned} \tag{3.19}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega h u_i q_i(h) \leq \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \left\| z^{-1} q_i(h) \right\|^2. \tag{3.20}$$

Isto prova a primeira desigualdade do teorema.

Para provar a segunda desigualdade, defina

$$c_{ij} = \int_\Omega u_j \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + u_i \frac{\Delta h}{2} \right). \tag{3.21}$$

Primeiro observamos uma propriedade de c_{ij}:

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= \int_\Omega u_j\left(\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle + u_i\frac{\Delta h}{2}\right)\\
&= \int_\Omega\left(-u_i\,div\left(u_j\nabla h\right) + u_ju_i\frac{\Delta h}{2}\right)\\
&= \int_\Omega\left(-u_i\left\langle\nabla h,\nabla u_j\right\rangle - u_iu_j\Delta h + u_ju_i\frac{\Delta h}{2}\right)\\
&= -\int_\Omega u_i\left(\langle\nabla h,\nabla u_j\rangle + u_j\frac{\Delta h}{2}\right)\\
&= -c_{ji}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega(-2)\phi_i\left(\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle + u_i\frac{\Delta h}{2}\right) &= \int_\Omega(-2)\left(hu_i - \sum_{j=1}^k a_{ij}u_j\right)\left(\langle\nabla h,\nabla u_i\rangle + u_i\frac{\Delta h}{2}\right)\\
&= \int_\Omega\left(-hu_i^2\Delta h - 2hu_i\left\langle\nabla h,\nabla u_i\right\rangle\right) + 2\sum_{j=1}^k a_{ij}c_{ij}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Se multiplicarmos a equação anterior (3.23) por $\left(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i\right)^2$

$$
\begin{aligned}
&\left(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i\right)^2\left(\int_\Omega\left(-hu_i^2\Delta h - 2hu_i\left\langle\nabla h,\nabla u_i\right\rangle\right) + 2\sum_{j=1}^k a_{ij}c_{ij}\right)\\
&= \left(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i\right)^2\left(\int_\Omega z^{\frac12}(-2)\phi_i\left(z^{-\frac12}\left\langle\nabla h,\nabla u_i\right\rangle + z^{-\frac12}u_i\frac{\Delta h}{2} - \sum_{j=1}^k z^{\frac12}c_{ij}u_j\right)\right)\\
&\le \delta\left(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i\right)^3\left(\int_\Omega z\phi_i^2\right) + \frac{\left(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i\right)}{\delta}\int_\Omega\left(z^{-\frac12}\left\langle\nabla h,\nabla u_i\right\rangle + z^{-\frac12}u_i\frac{\Delta h}{2} - z^{\frac12}\sum_{j=1}^k c_{ij}u_j\right)^2
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

$$= \delta \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right)^3 \|\phi_i\|^2 + \frac{(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)}{\delta} \left\{ \int_\Omega z^{-1} \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + u_i \frac{\Delta h}{2} \right) \right.$$

$$\underbrace{-2 \sum_{j=1}^{k} c_{ij} \underbrace{\int_\Omega u_j \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + u_i \frac{\Delta h}{2} \right)}_{c_{ij}} + \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \underbrace{\int_\Omega z u_j^2}_{1}}_{-\sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2} \tag{3.25}$$

$$\leq \delta \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right)^2 \left(\int_\Omega h u_i q_i(h) + \sum_{j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) a_{ij}^2 \right)$$

$$+ \frac{1}{\delta} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) \left(\left\| z^{-1} \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + u_i \frac{\Delta h}{2} \right) \right\|^2 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \right).$$

Como $a_{ij} = a_{ji}$, $c_{ij} = -c_{ji}$ e $\Gamma_{k+1} \geq \Gamma_i$ para $1 \leq i, j \leq k$, teremos

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right)^2 a_{ij} c_{ij} &\geq 2 \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) \left(\Gamma_j - \Gamma_i\right) a_{ij} c_{ij} \\ &= -2 \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) \left(\Gamma_i - \Gamma_j\right) a_{ij} c_{ij}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

e também

$$\delta \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right)^2 \left(\Gamma_i - \Gamma_j\right) a_{ij}^2 = -\delta \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) \left(\Gamma_i - \Gamma_j\right)^2 a_{ij}^2. \tag{3.27}$$

Daí vemos que

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right)^2 a_{ij} c_{ij} - \delta \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right)^2 \left(\Gamma_i - \Gamma_j\right) a_{ij}^2 + \frac{1}{\delta} \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) c_{ij}^2 \\ & \geq -2 \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) \left(\Gamma_i - \Gamma_j\right) a_{ij} c_{ij} + \delta \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) \left(\Gamma_i - \Gamma_j\right)^2 a_{ij}^2 \\ & \quad + \frac{1}{\delta} \sum_{i,j=1}^{k} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right) c_{ij}^2 \\ & = \sum_{i,j=1}^{k} \left(\delta^{\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\Gamma_i - \Gamma_j\right) a_{ij} + \frac{\left(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i\right)^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{1}{2}}} c_{ij} \right)^2 \\ & \geq 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Logo, somando a desigualdade (3.24) em i com $1 \leq i \leq k$, restará somente

$$\sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \left(\int_\Omega \left(-hu_i^2 \Delta h - 2hu_i \langle \nabla h, \nabla u_i \rangle \right) \right)$$

$$\leq \delta \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega hu_i q_i(h) + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \left\| z^{-1} \left(\langle \nabla h, \nabla u_i \rangle + u_i \frac{\Delta h}{2} \right) \right\|^2. \tag{3.29}$$

Isto finaliza a demonstração do teorema. ♦

3.2 Aplicações

Utilizaremos agora o resultado obtido na seção anterior. A idéia aqui é substituir a função h do Teorema 3.1 por funções adequadas para obter novas desigualdades. Ressaltamos que Ω e $\partial\Omega$ ainda são considerados como nas hipóteses do Teorema 3.1. Começamos com o seguinte corolário

Corolário 3.1. *Suponha existir uma função $\phi : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ e uma constante A_0 tal que*

$$|\nabla \phi| = 1, \ |\Delta \phi| \leq A_0, \quad em\ \Omega. \tag{3.30}$$

Então

$$\sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2$$
$$\leq 2P_1 \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \left(\frac{A_0^2}{P_2} + \frac{4A_0}{P_2} \left[\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{P_2} \left(4\Gamma_i P_2 + \rho^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho}{2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \left(\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2P_2^2} + \frac{A_0}{P_2^2} \left[\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{A_0}{4P_2^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.31}$$

onde $P_1 = \max_{x \in \Omega} z(x)$ e $P_2 = \min_{x \in \Omega} z(x)$.

Demonstração: Primeiramente calculamos algumas expressões que nos serão úteis ao decorrer da prova do corolário:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_1}\int_\Omega z u_i^2 \leq \int_\Omega u_i^2 \leq \frac{1}{P_2}\int_\Omega z u_i^2 = \frac{1}{P_2}; \tag{3.32}$$

e como

$$\Delta^2 u_i - \rho\Delta u_i = z\Gamma_i u_i, \tag{3.33}$$

tem-se

$$u_i\Delta^2 u_i - u_i\rho\Delta u_i = z\Gamma_i u_i^2, \tag{3.34}$$

e integrando a desigualdade acima

$$\int_\Omega u_i\Delta^2 u_i - \rho\int_\Omega u_i\Delta u_i = \Gamma_i, \tag{3.35}$$

resultando em

$$\int_\Omega (\Delta u_i)^2 + \rho\int_\Omega |\nabla u_i|^2 = \Gamma_i. \tag{3.36}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_i|^2 &= \int_\Omega u_i\Delta u_i \\ &\leq \left(\int_\Omega (\Delta u_i)^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega u_i^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_\Omega (\Delta u_i)^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \frac{z}{P_2}u_i^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_\Omega (\Delta u_i)^2\right)^{1/2}\frac{1}{P_2^{1/2}}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Logo, substituindo (3.37) em (3.36) teremos

$$P_2\left(\int_\Omega |\nabla u_i|^2\right)^2 + \rho\int_\Omega |\nabla u_i|^2 - \Gamma_i \leq 0, \tag{3.38}$$

isto é, acabamos de estimar $\int_\Omega |\nabla u_i|^2$:

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^2 \leq \frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2P_2}. \tag{3.39}$$

Esta estimativa também permite-nos estimar a seguinte integral

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_i||\nabla u_i| &\leq \left(\int_\Omega u_i^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla u_i|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2P_2^2}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Agora estimamos o termo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(-\phi u_i^2\Delta\phi - 2\phi u_i \langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle\right) &= \int_\Omega \left(\frac{-u_i^2\Delta\phi^2}{2} + u_i^2|\nabla\phi|^2 + \frac{u_i^2\Delta\phi^2}{2}\right)\\ &= \int_\Omega u_i^2 \\ &\geq \frac{1}{P_1}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Por último calculamos a integral

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} u_i\phi\Delta u_i \langle\nabla\phi,\nu\rangle \\ &= \int_\Omega div(u_i\phi\Delta u_i\nabla\phi) \\ &= \int_\Omega \left(u_i\phi\Delta u_i\Delta\phi + \langle\nabla\phi,\nabla(u_i\phi\Delta u_i)\rangle\right) \\ &= \int_\Omega \left(u_i\phi\Delta u_i\Delta\phi + u_i\phi\langle\nabla\phi,\nabla(\Delta u_i)\rangle + u_i\Delta u_i|\nabla\phi|^2 + \phi\Delta u_i\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle\right),\end{aligned} \tag{3.42}$$

donde obtemos

$$\int_\Omega u_i\phi\langle\nabla\phi,\nabla(\Delta u_i)\rangle = -\int_\Omega \left(u_i\phi\Delta u_i\Delta\phi + u_i\Delta u_i|\nabla\phi|^2 + \phi\Delta u_i\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle\right). \tag{3.43}$$

Estamos prontos para provar a desigualdade (3.31). Para isto, substitua $h=\phi$ na desigualdade (3.4):

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^k(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\int_\Omega\left(-\phi u_i^2\Delta\phi - 2\phi u_i\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle\right)\\ &\leq \delta\sum_{i=1}^k(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\int_\Omega \phi u_i\left(\Delta(u_i\Delta\phi) + 2\Delta\langle\nabla u_i,\nabla\phi\rangle + 2\langle\nabla\phi,\nabla(\Delta u_i)\rangle + \Delta\phi\Delta u_i\right.\\ &\quad\left.-\rho\left(u_i\Delta\phi + 2\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle\right)\right)\\ &\quad+\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^k(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\int_\Omega\left(\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle^2 + u_i\Delta\phi\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle + u_i^2\frac{(\Delta\phi)^2}{4}\right)z^{-1}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Por (3.41), reescrevemos a desigualdade acima como

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_1}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2 \\
&\leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\int_\Omega (\Delta(\phi u_i)u_i\Delta\phi + 2\Delta(\phi u_i)\langle\nabla u_i,\nabla\phi\rangle \\
&\quad +2\phi u_i\langle\nabla\phi,\nabla(\Delta u_i)\rangle + \phi u_i\Delta\phi\Delta u_i - \rho\left(u_i^2\phi\Delta\phi + 2u_i\phi\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle\right)) \\
&\quad +\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\int_\Omega\left(|\nabla\phi|^2|\nabla u_i|^2 + |u_i||\nabla\phi||\Delta\phi||\nabla u_i| + \frac{|\Delta\phi|^2}{4}u_i^2\right)z^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Utilizando-se das equações (3.39),(3.40) e (3.43), teremos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_1}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2 \\
&\leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\int_\Omega \big(u_i^2(\Delta\phi)^2 + \phi u_i\Delta\phi\Delta u_i + 2u_i\Delta\phi\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle \\
&\quad +2u_i\Delta\phi\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle + 2\phi\Delta u_i\langle\nabla u_i,\nabla\phi\rangle + 4\langle\nabla u_i,\nabla\phi\rangle^2 - 2u_i\phi\Delta u_i\Delta\phi \\
&\quad -2u_i\Delta u_i|\nabla\phi|^2 - 2\phi\Delta u_i\langle\nabla\phi,\nabla u_i\rangle + \phi u_i\Delta\phi\Delta u_i\big) \\
&\quad +\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\int_\Omega\left(|\nabla u_i|^2 + A_0|u_i||\nabla u_i| + \frac{A_0^2}{4P_2}u_i^2\right)z^{-1}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\leq \delta \sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2 \left[A_0^2 \int_\Omega u_i^2 + 4A_0 \int_\Omega |u_i||\nabla u_i| + 6\int \Omega |\nabla u_i|^2 + \frac{\rho}{P_2}\right]$$

$$+\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i) \left(\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2P_2^2} + \frac{A_0}{P_2^2} \left[\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{A_0}{4P_2^2} \right)$$

$$\leq \underbrace{\delta \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2 \left(\frac{A_0^2}{P_2} + \frac{4A_0}{P_2} \left[\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{P_2} \left(4\Gamma_i P_2 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho}{2} \right)}_{X}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1}-\Gamma_i) \left(\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2P_2^2} + \frac{A_0}{P_2^2} \left[\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{A_0}{4P_2^2} \right)}_{Y}.$$

Tomando $\delta = \left(\dfrac{Y}{X}\right)^{1/2}$, obteremos a desigualdade

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2 \\ &\leq P_1 \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2 \left(\frac{A_0^2}{P_2} + \frac{4A_0}{P_2} \left[\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{P_2} \left(4\Gamma_i P_2 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho}{2} \right) \right\}^{1/2} \\ &\times \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_{k+1}-\Gamma_i) \left(\frac{2\left(4\Gamma_i P_2 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}} - 2\rho}{P_2^2} + \frac{4A_0}{P_2^2} \left[\frac{(4\Gamma_i P_2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \rho}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{A_0}{P_2^2} \right) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.47}$$

como queríamos. ♦

Podemos também enunciar o seguinte corolário

Corolário 3.2. *Suponha existir uma função $\psi : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ e uma constante B_0 tal que*

$$|\nabla \psi| = 1, \ \Delta\psi = B_0, \quad em\ \Omega. \tag{3.48}$$

Então

$$\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2$$
$$\leq 2P_1\left\{\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\left(\frac{B_0^2}{P_2}-\frac{2B_0^2}{P_1}+\frac{3(4\Gamma_iP_2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}{P_2}-\frac{2\rho}{P_2}\right)\right\}^{1/2} \tag{3.49}$$
$$\times\left\{\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\left(\frac{B_0^2}{4P_2^2}+\frac{(4\Gamma_iP_2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho}{2P_2^2}-\frac{B_0^2}{2P_1^2}+\frac{B_0C}{2P_2}\right)\right\}^{1/2},$$

onde $P_1=\max_{x\in\Omega} z(x)$, $P_2=\min_{x\in\Omega} z(x)$ *e* $C=\sup_{x\in\Omega}|\nabla z(x)^{-1}|$.

Demonstração: Comecemos a demonstração com cálculos que nos permitirão fazer uma estimativa importante na prova do corolário.

Observe de início que vale

$$div(u_i^2z^{-1}\nabla\psi)=u_i^2z^{-1}\Delta\psi+u_i^2\left\langle\nabla z^{-1},\nabla\psi\right\rangle+2u_iz^{-1}\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle. \tag{3.50}$$

Integrando a igualdade acima em Ω e usando o Teorema de Stokes, obteremos

$$\begin{aligned}0=\int_{\partial\Omega}u_i^2z^{-1}\left\langle\nabla\psi,\nabla\nu\right\rangle &= \int_\Omega div(u_i^2z^{-1}\nabla\psi)\\ &= \int_\Omega\left(u_i^2z^{-1}B_0+u_i^2\left\langle\nabla z^{-1},\nabla\psi\right\rangle+2u_iz^{-1}\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle\right),\end{aligned} \tag{3.51}$$

desde que $\Delta\psi=B_0$ sobre Ω.

Ou seja, utilizando as desigualdades obtidas em (3.32) e lembrando que $|\nabla\psi|=1$, encontramos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_iz^{-1}\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle &= -\frac{B_0}{2}\int_\Omega u_i^2z^{-1}-\frac{1}{2}\int_\Omega u_i^2\left\langle\nabla z^{-1},\nabla\psi\right\rangle\\ &\leq -\frac{B_0}{2P_1}\int_\Omega u_i^2+\frac{1}{2}\int_\Omega u_i^2|\nabla\psi||\nabla z^{-1}|\\ &\leq -\frac{B_0}{2P_1^2}+\frac{B_0C}{2P_2}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Observe também que, de forma análoga a (3.41), podemos escrever

$$\int_\Omega\left(-\psi u_i^2\Delta\psi-2\psi u_i\left\langle\nabla\psi,\nabla u_i\right\rangle\right)\geq\frac{1}{P_1}. \tag{3.53}$$

Ainda, também calculamos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_i \langle \nabla u_i, \nabla \psi \rangle &= \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla u_i^2, \nabla \psi \rangle \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega u_i^2 \Delta \psi \\
&= -\frac{B_0}{2}\int_\Omega u_i^2 \\
&\leq -\frac{B_0}{2P_1}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

De posse das informações acima, partimos para a prova do corolário substituindo $h = \psi$ na fórmula (3.4) lembrando que vale (3.53)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_1}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \\
&\leq \delta \sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \int_\Omega (u_i \Delta(\psi u_i)\Delta\psi + 2\Delta(\psi u_i)\langle \nabla u_i, \nabla \psi \rangle + 2\psi u_i \langle \nabla \psi, \nabla(\Delta u_i)\rangle \\
&\quad + \psi u_i \Delta \psi \Delta u_i - \rho(u_i^2 \psi \Delta \psi + 2\psi u_i \langle \nabla \psi, \nabla u_i \rangle)) \\
&\quad + \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)\int_\Omega z^{-1}\left(\langle \nabla \psi, \nabla u_i \rangle + \frac{u_i \Delta \psi}{2}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Logo, por (3.39), (3.52) e (3.54), escrevemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{P_1}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2 \\
&\leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\left[\int_\Omega \big(u_i^2(\Delta\psi)^2 + u_i\psi\Delta\psi\Delta u_i + 2u_i\Delta\psi\left\langle\nabla\psi,\nabla u_i\right\rangle\right. \\
&\quad +2u_i\Delta\psi\left\langle\nabla\psi,\nabla u_i\right\rangle + 2\psi\Delta u_i\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle + 4\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle^2 - 2\psi u_i\Delta\psi\Delta u_i \\
&\quad \left. -2u_i\Delta u_i|\nabla\psi|^2 - 2\psi\Delta u_i\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle + \psi u_i\Delta\psi\Delta u_i\big) + \frac{\rho}{P_2}\right] \\
&\quad +\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\int_\Omega z^{-1}\left(\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle^2 + u_i\Delta\psi\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle + \frac{u_i^2(\Delta\psi)^2}{4}\right) \\
&\leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\left[B_0^2\int_\Omega u_i^2 + 4B_0\int_\Omega u_i\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle\right. \\
&\quad \left. +4\int_\Omega|\nabla u_i|^2|\nabla\psi|^2 + 2\int_\Omega|\nabla u_i|^2\right] \\
&\quad +\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\left[\int_\Omega z^{-1}|\nabla u_i|^2|\nabla\psi|^2 + B_0\int_\Omega z^{-1}u_i\left\langle\nabla u_i,\nabla\psi\right\rangle + \frac{B_0^2}{4}\int_\Omega z^{-1}u_i^2\right] \\
&\leq \delta\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\left[B_0^2\int_\Omega u_i^2 - 2B_0\int_\Omega u_i^2 + 6\int_\Omega|\nabla u_i|^2 + \frac{\rho}{P_2}\right] \\
&\quad +\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\left[\frac{1}{P_2}\int_\Omega|\nabla u_i|^2 - \frac{B_0^2}{2P_1^2} + \frac{B_0C}{2P_2} + \frac{B_0^2}{4P_2^2}\right]
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \underbrace{\delta \sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\left[\frac{B_0^2}{P_2}-\frac{2B_0^2}{P_1}+\frac{3(4\Gamma_i P_2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}{P_2}-\frac{2\rho}{P_2}\right]}_{X} \\
&+\underbrace{\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\left[\frac{(4\Gamma_i P_2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho}{2P_2^2}-\frac{B_0^2}{2P_1^2}+\frac{B_0C}{2P_2}+\frac{B_0^2}{4P_2^2}\right]}_{Y}.
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Tome agora $\delta = \left(\frac{Y}{X}\right)^{1/2}$. Portanto teremos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2 \\
&\leq P_1\left\{\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)^2\left[\frac{B_0^2}{P_2}-\frac{2B_0^2}{P_1}+\frac{3(4\Gamma_i P_2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}{P_2}-\frac{2\rho}{P_2}\right]\right\}^{1/2} \\
&\times\left\{\sum_{i=1}^{k}(\Gamma_{k+1}-\Gamma_i)\left[\frac{2(4\Gamma_i P_2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-2\rho}{P_2^2}-\frac{2B_0^2}{P_1^2}+\frac{2B_0C}{P_2}+\frac{B_0^2}{P_2^2}\right]\right\}^{1/2},
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

finalizando a demonstração. ♦

3.2.1 Exemplos

A esta altura podemos nos perguntar sobre a validade das hipóteses dos dois corolários dados na seção anterior, ou seja, podemos nos perguntar: "Existem realmente funções ϕ e ψ satisfazendo as hipóteses sobre elas impostas?". A resposta é sim (que bom!) e é dada em [42].

Exemplo 3.1. Seja M uma variedade de Hadamard tal que sua curvatura de Ricci satisfaça $Ric_M \geq -(n-1)c^2$, com $c \geq 0$ e tome $\gamma : [0,\infty) \longmapsto M$ um raio geodésico, $|\gamma'| = 1$ com $d(\gamma(s),\gamma(t)) = t - s$ para quaisquer $t > s > 0$. A função de Busemann correspondente a γ é definida por

$$b_\gamma(x) = \lim_{t\to\infty}[d(x,\gamma(t)) - t].$$

Conforme observado em [42], valem $|\nabla b_\gamma| = 1$ por [3, 20], e pelo Teorema 3.5 em [35], temos $|\Delta b_\gamma| \leq (n-1)c$ sobre M.

Concluímos então que qualquer variedade de Hadamard com curvatura de Ricci limitada inferiormente admite função satisfazendo (3.30).

Exemplo 3.2. Seja (N, ds_N^2) uma variedade Riemanniana completa e defina uma métrica Riemanniana sobre $M = \mathbb{R} \times N$ por

$$ds_N^2 = dt^2 + \eta^2(t)ds_N^2,$$

tal que η é uma função suave positiva definida sobre $\mathbb{R}$ com $\eta(0) = 1$. A variedade M é chamada variedade produto e denotada por $M = \mathbb{R} \times_\eta N$, e além disso é possível provar que M é completa.

Considerando $\eta = e^{-t}$ e definindo $\psi : M \longmapsto \mathbb{R}$ por $\psi(t, x) = t$, Xia e Wang [42] mostraram que valem

$$|\nabla\psi| = 1, \quad \Delta\psi = 1 - n.$$

Portanto, variedades do tipo $M = \mathbb{R} \times_{e^{-t}} N$ admitem funções satisfazendo (3.48).

Capítulo 4

Estimativas para autovalores e a Conjectura de Pólya

Finalizamos o trabalho apresentando um resultado envolvendo estimativas para autovalores em busca de uma desigualdade que se aproxime (ou que de certa forma seja semelhante) com a conjectura de Pólya. Não provamos a conjectura de Pólya mencionada na introdução deste trabalho, mas generalizamos o resultado obtido por Q.-M Cheng e Guoxin Wei [17].

4.1 Resultados auxiliares

Considere $\{u_i\}_{i=1}^k$ um conjunto de funções ortonormais e $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ os autovalores correspondentes do seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u_i &= \lambda_i(-\Delta)^r u_i \\ u_i|_{\partial\Omega} &= \dfrac{\partial u_i}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \ldots = \dfrac{\partial^{l-1} u_i}{\partial\nu^{l-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega u_i\Delta^r u_j &= \delta_{ij},\ i,j = 1,\ldots,k, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $r \geq 0$ e l são inteiros positivos tais que $l \geq r+1$. Iniciamos provando uma série de lemas úteis para nossos cálculos ao longo deste capítulo.

Lema 4.1. *Seja $g : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$ e u_i como no problema (4.1). Então*

$$\sum_{i=1}^{k} \left| \int_{\Omega} g u_i \, dx \right|^2 \leq \int_{\Omega} g^2 dx \tag{4.2}$$

Demonstração: Seja $g = Tg + w$ com $Tg \in \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_k\}$ e de tal forma que $w \perp Tg$. Logo

$$\begin{aligned} \| g \|_{L^2}^2 &= \| Tg \|_{L^2}^2 + \| w \|_{L^2}^2 \\ &\geq \| Tg \|_{L^2}^2 . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $Tg \in \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_k\}$, então

$$\begin{aligned} Tg &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle Tg, u_i \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle g, u_i \rangle \text{, desde que } w \perp Tg. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \| Tg \|_{L^2}^2 &= \left\| \left(\sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} g u_i \, dx \right) u_i \right\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{\Omega} g u_i \, dx \right|^2 . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Substituindo (4.5) na desigualdade (4.3) obtemos a desigualdade (4.2), como desejado. ♦

Lema 4.2. *As funções $f_i(x) \equiv \Delta^h u_i(x)$, com $i = 1, \ldots, k$ e $r = 2h$, formam um conjunto ortonormal em $L^2(\Omega)$.*

Demonstração: Por hipótese $f_i(x) = \Delta^h u_i(x)$ e $u_i|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u_i}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \ldots = \left.\frac{\partial^{l-1} u_i}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0$, para $i = 1, \ldots, k$,. Aplicamos o Teorema de Stokes repetidamente:

$$\begin{aligned} (f_i, f_j)_{L^2} &= \int_{\Omega} f_i f_j \\ &= \int_{\Omega} \left(\Delta^h u_i\right) \left(\Delta^h u_j\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left(\Delta^{h-1}u_i\right)\left(\Delta^{h+1}u_j\right) \\
&= \int_\Omega \left(\Delta^{h-2}u_i\right)\left(\Delta^{h+2}u_j\right) \\
&\vdots \\
&= \int_\Omega u_i \left(\Delta^{2h}u_j\right) \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

♦

Lema 4.3 (Melas [31])**.** *Sejam $n \geq 1$, $\eta, A > 0$ e $\psi : [0,+\infty) \longmapsto [0,+\infty)$ uma função decrescente (e absolutamente contínua) e suave tal que*

$$-\eta \leq \psi'(s) \leq 0$$

e

$$A = \int_0^\infty s^{n-1}\psi(s)ds.$$

Então

$$\int_0^\infty s^{n+1}\psi(s)ds \geq \frac{1}{n+2}(nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{-\frac{2}{n}} + \frac{A\psi(0)^2}{6(n+2)\eta^2}. \tag{4.6}$$

Em 2010 Xia e Wang [43] generalizaram o lema acima

Lema 4.4 (Xia-Wang [43])**.** *Sejam $n \geq 2$, $\eta, A > 0$ e $\psi : [0,+\infty) \longmapsto [0,+\infty)$ uma função decrescente (e absolutamente contínua) e suave tal que*

$$-\eta \leq \psi'(s) \leq 0$$

e

$$A = \int_0^\infty s^{n-1}\psi(s)ds.$$

Então, para um inteiro fixado m positivo, temos

$$\int_0^\infty s^{n-1+2m}\psi(s)ds \geq \frac{1}{n+2m}(nA)^{\frac{n+2m}{n}}\psi(0)^{-\frac{2m}{n}} + \frac{mA\psi(0)^{2m}}{(n+2m)(2m+1)2^{2m-1}\eta^{2m}}.$$

Motivados pelo trabalho de Cheng e Wei [17], provamos uma outra estimativa para a integral acima com uma hipótese adicional. Este lema torna-se uma das peças chaves para a prova do principal teorema deste capítulo. Temos assim o

Lema 4.5. *Sob as mesmas condições do Lema 4.4 considerando as mesmas notações e ainda, supondo existir uma constante $d < 1$, tal que*

$$\frac{\psi(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{6n\eta^{\frac{2}{n}}(nA)^{\frac{2}{n}}} < d,$$

vale a seguinte desigualdade, para $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty s^{n-1+2m}\psi(s)ds \\
&\geq \frac{1}{n+2m}(nA)^{\frac{n+2m}{n}}\psi(0)^{-\frac{2m}{n}} \\
&\quad+\left(\frac{1}{(n+2)6\eta^2} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))d}{(n+2m)(n+2)^2 6\eta^2}\right)(nA)^{\frac{2(m-1)}{n}}A\psi(0)^{\frac{2(n+1-m)}{n}} \\
&\quad+\left(\frac{2(m-1)}{(n+2m)(n+2)36\eta^4} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))d}{(n+2m)(n+2)^2 36\eta^4}\right)n^{\frac{2m-4-n}{n}}A^{\frac{2m-4+n}{n}}\psi(0)^{\frac{4+4n-2m}{n}} \\
&\quad+\left(\frac{m-1}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2(m-1)}}\right)(nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{2n(m-1)-2}{n}} \\
&\quad+\left(\frac{m-1}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m}}\right)A\psi(0)^{2m}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Demonstração: Observe inicialmente que pelo Lema 4.4, para $m \geq 1$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty s^{n-1+2(m-1)}\psi(s)ds \quad \geq \quad & \frac{1}{n+2(m-1)}(nA)^{\frac{n+2(m-1)}{n}}\psi(0)^{-\frac{2(m-1)}{n}} \\
&+\frac{(m-1)A\psi(0)^{2(m-1)}}{(n+2(m-1))(2(m-1)+1)2^{2(m-1)-1}\eta^{2(m-1)}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Como a inequação (4.6) vale para todo $n \geq 1$, temos que

$$\int_0^\infty s^{n-1+2m}\psi(s)ds$$

$$\geq \frac{1}{(n+2m)}\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{-\frac{2}{n}} + A\psi(0)^2\right)^{\frac{n+2m}{n+2}}\psi(0)^{\frac{-2(m-1)}{n+2}}$$

$$+\frac{(m-1)}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2(m-1)}}\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}} + \frac{A\psi(0)^2}{6\eta^2}\right)\psi(0)^{2(m-1)}$$

$$= \frac{1}{n+2m}\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}} + \frac{A\psi(0)^2}{6\eta^2}\right)\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}}\right)^{\frac{2(m-1)}{n+2}}$$

$$\times\left(1+\frac{A\psi(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2}\right)^{\frac{2(m-1)}{n+2}}\psi(0)^{\frac{-2m+2}{n+2}}$$

$$+\underbrace{\frac{(m-1)(nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{2n(m-1)-2}{n}}}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m-2}} + \frac{(m-1)A\psi(0)^{2m}}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m}}}_{(*)}$$

$$\geq \frac{1}{n+2m}\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}} + \frac{A\psi(0)^2}{6\eta^2}\right)\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}}\right)^{\frac{2(m-1)}{n+2}}$$

$$\times\underbrace{\left(1+\frac{2(m-1)A\psi(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{(n+2)6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2} + \frac{(m-1)}{n+2}\left(\frac{2(m-1)}{n+2}-1\right)\left(\frac{A\psi(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2}\right)^2\right)\psi(0)^{\frac{-2m+2}{n+2}}}_{\text{Utilizando a Fórmula de Taylor}}$$

$$+(*)$$

$$= \frac{1}{n+2m}\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}} + \frac{A\psi(0)^2}{6\eta^2}\right)\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}}\right)^{\frac{2(m-1)}{n+2}}$$

$$\times\left\{1+\frac{(m-1)A\psi(0)^{\frac{n+2}{n}}}{(n+2)6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2}\left(2-\frac{n+2(2-m)}{n+2}\frac{A\psi(0)^{\frac{n+2}{n}}}{6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2}\right)\right\}\psi(0)^{\frac{-2m+2}{n+2}}$$

$$+(*)$$

$$= \frac{1}{n+2m}\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}} + \frac{A\psi(0)^2}{6\eta^2}\right)\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}}\right)^{\frac{2(m-1)}{n+2}}$$

$$\times\left\{1 + \frac{m-1}{n+2}\frac{A\psi(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2}\left(2 - \frac{n+2(2-m)}{n+2}\frac{A\psi(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2}\right)\right\}\psi(0)^{\frac{-2m+2}{n+2}}$$

$$+(*)$$

$$\geq \frac{1}{n+2m}\left((nA)^{\frac{2(m-1)}{n}}\psi(0)^{\frac{-4(m-1)}{n(n+2)}}\right)\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}} + \frac{A\psi(0)^2}{6\eta^2}\right)\psi(0)^{\frac{-2m+2}{n+2}}$$

$$+\frac{1}{n+2m}\left((nA)^{\frac{2(m-1)}{n}}\psi(0)^{-\frac{4(m-1)}{n(n+2)}}\right)\left((nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{-2}{n}} + \frac{A\psi(0)^2}{6\eta^2}\right)$$

$$\times\left(\frac{2(m-1)}{n+2}\frac{A\psi(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2} - \frac{m-1}{n+2}\frac{(m-1)A\psi(0)^{\frac{n+2}{n}}d(n+2(2-m))}{(n+2)^2 6(nA)^{\frac{n+2}{n}}\eta^2}\right)\psi(0)^{\frac{-2m+2}{n+2}}$$

$$+(*)$$

$$= \frac{1}{n+2m}(nA)^{\frac{n+2m}{n}}\psi(0)^{-\frac{2m}{n}} + \frac{A}{(n+2m)6\eta^2}(nA)^{\frac{2(m-1)}{n}}\psi(0)^{\frac{2(1+n-m)}{n}}$$

$$+\frac{2(m-1)(nA)^{\frac{2(m-1)}{n}}}{(n+2m)(n+2)6\eta^2}A\psi(0)^{\frac{2(n+1-m)}{n}} - \frac{(m-1)d(n+2(2-m))}{(n+2m)(n+2)^2 6\eta^2}(nA)^{\frac{2(m-1)}{n}}A\psi(0)^{\frac{2(n+1-m)}{n}}$$

$$+\frac{2(m-1)(nA)^{\frac{2(m-2)}{n}}}{(n+2m)(n+2)36n\eta^4}A\psi(0)^{\frac{2(2+2n-m)}{n}} - \frac{(m-1)d(n+2(2-m))}{(n+2m)(n+2)^2 36n\eta^4}(nA)^{\frac{2m-4}{n}}A\psi(0)^{\frac{2(2+2n-m)}{n}}$$

$$+\frac{(m-1)(nA)^{\frac{n+2}{n}}\psi(0)^{\frac{2n(m-1)-2}{n}}}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m-2}} + \frac{(m-1)A\psi(0)^{2m}}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m}}$$

Agrupando os termos de mesma potência em $\psi(0)$ a inequação (4.7) segue de imediato.

♦

Observação 4.1. O Lema 4.5 acima é uma generalização do Lema 2.1 de Cheng e Wei [17].

Lema 4.6 (Cheng e Wei [17])**.** *Seja $b \geq 1$, $\eta > 0$ e $\psi : [0,\infty) \longmapsto [0,\infty)$ uma função* *suave decrescente tal que*

$$-\eta \leq \psi'(s) \leq 0$$

e, para uma constante $d < 1$,

$$\frac{\psi(0)^{\frac{2b+2}{b}}}{6b\eta^2(bA)^{\frac{2}{b}}}$$

com A *tomado como no Lema 4.3. Então vale*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{b+3}\psi(s)ds \quad \geq \quad & \frac{1}{b+4}(bA)^{\frac{b+4}{b}}\psi(0)^{-\frac{4}{b}} \\ & + \left(\frac{1}{3b(b+4)\eta^2} - \frac{d}{6(b+2)^2(b+4)\eta^2}\right)(bA)^{\frac{b+2}{b}}\psi(0)^{\frac{2b-2}{b}} \\ & + \left(\frac{1}{36b(b+4)\eta^4} - \frac{d}{36(b+2)^2(b+4)\eta^4}\right)A\psi(0)^4.\end{aligned} \tag{4.9}$$

No lema de Cheng e Wei o problema em questão é o problema de vibração de um prato com extremidades fixas visto no Capítulo 3, tomando $\rho = 0$ e $z = 1$. Assim $l = 2$ e $r = 0$, e logo $m = 2$. Fazendo $m = 2$ no Lema 4.5, obtemos a desigualdade (4.9), como afirmado.

O último lema desta seção trata-se de uma desigualdade puramente algébrica.

Lema 4.7. *Sejam* $n, m \geq 1$ *inteiros com* n *fixo,* C_1, C_2, C_3 *e* C_4 *constantes positivas. Defina a função* $P(t)$ *com* $t \in \mathbb{R}^n$ *por*

$$\begin{aligned}P(t) \quad = \quad & \left[\frac{(n+1-m)(n+2m)}{3n(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))(n+1-m)}{144n^3(n+2)}\right]C_1 t^{\frac{2n+2}{n}} \\ & + \left[\frac{(m-1)(2+2n-m)}{9n^2(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))(2+2n-m)}{864n^4(n+2)}\right]C_2 t^{\frac{4n+4}{n}} \\ & + \left[\frac{(m-1)(2n(m-1)-2)}{(n+2)(2m-1)2^{2m-3}}\right]C_3 t^{\frac{(2n+2)(m-1)}{n}} \\ & + \left[\frac{m(m-1)}{3(n+2)(2m-1)2^{2m-3}}\right]C_4 t^{\frac{2mn+2m}{n}}.\end{aligned}$$

Se $1 \leq m \leq n+1$, *então* P *é uma função crescente em* t.

Demonstração: Por hipótese, os expoentes em t sempre serão iguais a 0 ou maiores do que 1. Então, para tentar provar o teorema, impomos a condição de cada coeficiente do polinômio ser maior ou igual a zero.

Nota-se trivialmente de início que os dois últimos termos do polinômio, por hipótese, são sempre positivos. Resta-nos provar que os dois primeiros termos do polinômio são sempre positivos. Temos assim dois termos a analisar:

1. Se

$$\left[\frac{(m-1)(2+2n-m)}{9n^2(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))(2+2n-m)}{864n^4(n+2)}\right] \geq 0,$$

então

$$\frac{(m-1)(2+2n-m)}{9n^2(n+2)}\left[1 - \frac{n+4-2m}{96n^2}\right] \geq 0,$$

e daí

$$2+2n-m \geq 0 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{n+4-2m}{96n^2} \geq 0$$

$$\text{ou}$$

$$2+2n-m \leq 0 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{n+4-2m}{96n^2} \leq 0.$$

i. Caso $2+2n-m \geq 0$, temos $m \leq 2n+2$. Se ainda

$$1 - \frac{n+4-2m}{96n^2} \geq 0 \Longrightarrow \frac{96n^2 - n + 4 - 2m}{96n^2} \geq 0$$

$$\Longrightarrow 96n^2 - n + 4 - 2m \geq 0 \Longrightarrow m \geq \frac{n}{2} + 2 - 48n^2.$$

Como $\frac{n}{2} + 2 - 48n^2 \leq 1$ para todo $n \geq 1$, $1 - \frac{n+4-2m}{96n^2} \geq 0$ vale sempre para quaisquer $m, n \geq 1$. Logo $m \leq 2n+2$ é solução.

ii. Caso $2+2n-m \leq 0$, temos $m \geq 2n+2 \geq 4$. Se ainda

$$1 - \frac{n+4-2m}{96n^2} \leq 0 \Longrightarrow \frac{96n^2 - n + 4 - 2m}{96n^2} \leq 0$$

$$\Longrightarrow 96n^2 - n + 4 - 2m \leq 0 \Longrightarrow m \leq \frac{n}{2} + 2 - 48n^2.$$

Mas $m \leq \frac{n}{2} + 2 - 48n^2 < 3$ para todo $n \geq 1$, o que é absurdo! Logo este caso possui solução vazia.

2. Se

$$\left[\frac{(n+1-m)(n+2m)}{3n(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))(n+1-m)}{144n^3(n+2)}\right] \geq 0,$$

então

$$\frac{(n+1-m)}{3n(n+2)}\left[(n+2m) - \frac{(m-1)(n+4-2m)}{48n^2}\right] \geq 0,$$

e daí

$$n+1-m \geq 0 \quad \text{e} \quad (n+2m) - \frac{(m-1)(n+4-2m)}{48n^2} \geq 0$$

ou

$$n+1-m \leq 0 \quad \text{e} \quad (n+2m) - \frac{(m-1)(n+4-2m)}{48n^2} \leq 0.$$

i. Caso $n+1-m \geq 0$, temos $m \leq n+1$. Se ainda

$$(n+2m) - \frac{(m-1)(n+4-2m)}{48n^2} \geq 0,$$

$$\Longrightarrow \frac{2m^2 + (96n^2-n-6)m + (48n^3+n+4)}{48n^2} \geq 0.$$

Neste caso é fácil ver que $96n^2 - n - 6 > 0$ sempre que $n \geq 1$. Logo a desigualdade acima sempre é válida para todo $m, n \geq 1$, donde $m \leq n+1$ é solução deste caso.

ii. Caso $n+1-m \leq 0$, temos $n+1 \leq m$. Se ainda tivermos

$$(n+2m) - \frac{(m-1)(n+4-2m)}{48n^2} \leq 0,$$

$$\Longrightarrow \frac{2m^2 + (96n^2-n-6)m + (48n^3+n+4)}{48n^2} \leq 0.$$

Segue do item **2i.** que o polinômio do numerador é estritamente positivo para $n, m \geq 1$, donde este caso possui solução vazia.

Portanto $P(t)$ é crescente para $1 \leq m \leq n+1$, como desejado. ♦

Terminando esta seção, enunciamos um resultado devido a Xia e Wang [43], o qual será de grande utilidade para a prova de um dos casos do teorema principal deste capítulo.

Teorema 4.1 (Xia-Wang [43]). *Seja $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana compacta 2-dimensional com fronteira; seja ainda l, r e s inteiros positivos com $l > r + s$. Considere os seguintes problemas de autovalores*

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u &= \Lambda(-\Delta)^r u \quad em\ M, \\ u|_{\partial M} &= \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial M} = \ldots = \dfrac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_{\partial M} = 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u &= \Gamma(-\Delta)^{r+s} u \quad em\ M, \\ u|_{\partial M} &= \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial M} = \ldots = \dfrac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_{\partial M} = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Denote por

$$0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \ldots$$

e

$$0 < \Gamma_1 \leq \Gamma_2 \leq \Gamma_3 \leq \ldots$$

os autovalores sucessivos de (4.10) e (4.11), respectivamente. Então vale

$$\Gamma_k \geq \Lambda_k^{(l-r-s)/(l-r)} \quad \forall k = 1, 2, \ldots. \tag{4.12}$$

4.2 Generalização do Teorema de Cheng-Wei

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e ν o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= \Gamma u, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

Como já visto no Capítulo 1, sabemos que o espectro deste problema é real e discreto satisfazendo

$$0 < \Gamma_1 \leq \Gamma_2 \leq \cdots \leq \Gamma_k \leq \cdots \to \infty.$$

Cheng e Wei [17] provaram para o Problema (4.13) a desigualdade

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Gamma_j \quad \geq \quad & \frac{n}{n+4}\frac{16\pi^4}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{4}{n}}}k^{\frac{4}{n}} \\
& + \left(\frac{n+2}{12n(n+4)} - \frac{1}{1152n^2(n+4)}\right)\frac{n|\Omega|}{(n+2)I(\Omega)}\frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}} \qquad (4.14) \\
& + \left(\frac{1}{576n(n+4)} - \frac{1}{27648n^2(n+2)(n+4)}\right)\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^2
\end{aligned}
$$

Como teorema principal deste capítulo apresentamos uma generalização para o resultado de Cheng e Wei, o teorema

Teorema 4.2. *Seja Ω um domínio limitado conexo em $\mathbb{R}^n$, $r \geq 0$ e l inteiros positivos tais que $l \geq r+1$. Considere λ_i o i-ésimo autovalor do problema*

$$
\begin{cases} (-\Delta)^l u = \lambda(-\Delta)^r u \quad \text{em}\, \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \ldots = \dfrac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad (4.15)
$$

Faça $m = l - r$. Se $m \leq n+1$, então

i) se r é par, para cada $k = 1, 2, \cdots$, temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \\
&\geq \frac{n}{n+2m}k\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2m} \\
&\quad + \left[\frac{1}{24(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))}{1152n^2(n+2)(n+2m)}\right]k\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2m-2}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right) \\
&\quad + \left[\frac{2(m-1)}{(n+2m)(n+2)576n} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))}{27648n^3(n+2m)(n+2)}\right]k\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2m-4}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^2
\end{aligned}
\qquad (4.16)
$$

$$
+\left[\frac{n(m-1)}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{4m-5}}\right]k\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^2\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^{m-1}
$$

$$
+\left[\frac{(m-1)}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{4m-3}}\right]k\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^{m}. \tag{4.17}
$$

ii) se r é ímpar e $p=l+1-r=m+1$, para cada $k=1,2,\cdots$, temos

$$
\begin{aligned}
\lambda_j \geq & \left\{\frac{n}{n+2p}\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2p}\right. \\
& +\left[\frac{1}{24(n+2)}-\frac{(p-1)(n+2(2-p))}{1152n^2(n+2)(n+2p)}\right]\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2p-2}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right) \\
& +\left[\frac{2(p-1)}{(n+2p)(n+2)576n}-\frac{(p-1)(n+2(2-p))}{27648n^3(n+2p)(n+2)}\right]\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2p-4}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^2 \\
& +\left[\frac{n(p-1)}{(n+2)(n+2p)(2p-1)2^{4p-5}}\right]\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^2\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^{p-1} \\
& \left.+\left[\frac{(p-1)}{6(n+2p)(n+2)(2p-1)2^{4p-3}}\right]\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^{p}\right\}^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Demonstração: Consideremos primeiro o caso em que $r=2h$ é par. Considere $\{u_i\}_{i=1}^k$ um conjunto de funções ortonormais e $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ os autovalores correspondentes, isto é

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
(-\Delta)^l u_i & = & \lambda_i(-\Delta)^r u_i \\
u_i|_{\partial\Omega} & = & \left.\frac{\partial u_i}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=\ldots=\left.\frac{\partial^{l-1}u_i}{\partial\nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega}=0 \\
\int_\Omega u_i\Delta^r u_j & = & \delta_{ij},\ i,j=1,\ldots,k.
\end{array}\right.
$$

Extendemos u_i a $\mathbb{R}^n$ tomando $u_i(x)=0$ para $x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ e definimos $f_j(x)\equiv\Delta^h u_j(x)$.

Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Bessel (Capítulo 1, equação (1.9)), teremos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}|F(f_j)(z)|^2 &= \sum_{j=1}^{k}|\left((2\pi)^{-n/2}e^{i<x,z>}, f_j(x)\right)_{L^2}|^2 \\ &\leq ||e^{i<x,z>}||^2\cdot(2\pi)^{-n/2} \\ &= (2\pi)^{-n}|\Omega|.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Utilizando-se das propriedades da Transformada de Fourier vistas no Capítulo 1,

$$\begin{aligned}z_qF(f_j)(z) &= -iF\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_q}\right)(z), \\ z_q^2F(f_j)(z) &= -F\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_q^2}\right)(z),\end{aligned} \tag{4.20}$$

e fazendo $m = l - r$, calculamos (4.20) repetidamente:

- Se $m = 2s$ é par

$$\begin{aligned}F((-\Delta)^s f_j)(z) &= (2\pi)^{-n/2}\int_\Omega e^{-i<x,z>}(-\Delta)^s f_j\,dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_\Omega \Delta e^{-i<x,z>}(-\Delta)^{s-1} f_j\,dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}|z|^2\int_\Omega e^{-i<x,z>}(-\Delta)^{s-1} f_j\,dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}|z|^2\int_\Omega \Delta e^{-i<x,z>}(-\Delta)^{s-2} f_j\,dx \\ &\ \ \vdots \\ &= (2\pi)^{-n/2}|z|^{2s}\int_\Omega e^{-i<x,z>} f_j\,dx \\ &= |z|^{2s}F(f_j)(z).\end{aligned}$$

- Se $m = 2s + 1$ é ímpar

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{n}\left|F\left(\frac{\partial(-\Delta)^s f_j}{\partial z_q}\right)(z)\right|^2 &= \sum_{q=1}^{n}|z_qF\left((-\Delta)^s f_j\right)(z)|^2 \\ &= \sum_{q=1}^{n}z_q^2\left|F\left((-\Delta)^s f_j\right)(z)\right|^2 \\ &= \sum_{q=1}^{n}z_q^2|z|^{4s}\left|F(f_j)(z)\right|^2 \\ &= |z|^{4s+2}\left|F(f_j)(z)\right|^2.\end{aligned}$$

Pela fórmula de Plancherel (Capítulo 1, equação (1.10)) também calculamos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |z|^{2m} |F(f_j)(z)|^2 \, dz &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{q=1}^{n} \left| F\left(\frac{\partial (-\Delta)^s f_j}{\partial z_q} \right)(z) \right|^2 \, dz \\
&= \sum_{q=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} F\left(\frac{\partial (-\Delta)^s f_j}{\partial z_q} \right)(z) \, \overline{F\left(\frac{\partial (-\Delta)^s f_j}{\partial z_q} \right)(z)} \, dz \\
&= \sum_{q=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial (-\Delta)^s f_j}{\partial z_q} \right|^2 \, dz \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s f_j \Delta((-\Delta)^s f_j) \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} ((-\Delta)^{2s+1} f_j) f_j \, dz \qquad (4.21) \\
&= \int_{\Omega} ((-\Delta)^{2s+1+h} u_j) \Delta^h u_j \, dz \\
&= \int_{\Omega} ((-\Delta)^{2s+1+2h} u_j) u_j \, dz \\
&= \int_{\Omega} ((-\Delta)^{l} u_j) u_j \, dz \\
&= \lambda_j \int_{\Omega} u_j (-\Delta)^r u_j \, dz \\
&= \lambda_j .
\end{aligned}
$$

Observando o fato de que

$$
\frac{\partial}{\partial z_l} F(f_j)(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\Omega} x_l f_j e^{i<x,z>} \, dx,
$$

pelo Lema 4.1, segue então

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\partial F(f_j)(z)}{\partial z_l} \right|^2 &= (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{\Omega} f_j x_l e^{i<x,z>} \, dx \right|^2 \\
&\leq (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} |x_l e^{i<x,z>}| \, dx \qquad (4.22) \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} |x_l|^2 \, dx,
\end{aligned}
$$

e daí,

$$
\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\partial F(f_j)(z)}{\partial z_l} \right|^2 = \sum_{j=1}^{k} |\nabla F(f_j)(z)|^2 \leq (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} |x|^2 \, dx. \qquad (4.23)
$$

Definindo

$$
G(z) = \sum_{j=1}^{k} |F(f_j)(z)|^2,
$$

por (4.19) teremos $0 \leq G(z) \leq (2\pi)^{-n}|\Omega|$, e

$$\begin{aligned} |\nabla G(z)| &= 2\left|\sum_{j=1}^{k} F(f_j)(z)\nabla F(f_j)(z)\right| \\ &\leq 2\sum_{j=1}^{k} |F(f_j)(z)|\,|\nabla F(f_j)(z)| \\ &\leq 2\left(\sum_{j=1}^{k} |F(f_j)(z)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{k} |\nabla F(f_j)(z)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega|\ \ I(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} G(z)\,dz &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{k} |F(f_j)(z)|^2\,dz \\ &= \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} f_j^2\,dz \\ &= \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta^h u_j)(\Delta^h u_j)\,dx \\ &= \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} u_j \Delta^r u_j\,dx \\ &= k. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Concluímos então da expressão (4.21) e do modo como G foi definida que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |z|^{2m} G(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j. \tag{4.26}$$

Consideramos agora $G^*(z) = g(|z|)$ a representação esférica decrescente de G, e por aproximação, podemos assumir que $g : [0,\infty] \longmapsto [0,(2\pi)^{-n}|\Omega|]$ é absolutamente contínua. Definindo $\alpha(t) = |\{G^* > t\}| = |\{G > t\}|$ e denotando ω_n como sendo o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, teremos

$$\alpha(g(s)) = \omega_n s^n,$$

implicando em

$$\alpha'(g(s))g'(s) = n\omega_n s^{n-1}$$

para todo $s \in [0, \infty]$.

Por outro lado, pela fórmula da Co-área (Capítulo 1, equação (1.12))

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= |\{G > t\}| \\ &= \int_{\{G>t\}} dx \\ &= \int_t^{\sup \mathrm{h}} \left(\int_{\{G=s\}} \frac{1}{|\nabla G|} dA_s \right) ds,\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\alpha'(t) = -\int_{\{G=t\}} |\nabla G|^{-1} \, dA_t.$$

Faça $\eta = 2(2\pi)^{-n}(|\Omega| \; I(\Omega))^{1/2}$. Utilizando a desigualdade isoperimétrica (Capítulo 1, desigualdade (1.11)) e a desigualdade (4.24), obtemos

$$\begin{aligned}-\alpha'(g(s)) &= \int_{\{G=g(s)\}} |\nabla G|^{-1} \, dA_{g(s)} \\ &\geq \eta^{-1} | \{G = g(s)\} | \\ &\geq \eta^{-1} n \omega_n^{1/n} |G \geq g(s)|^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \eta^{-1} n \omega_n^{1/n} (s^n \omega_n)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \eta^{-1} n \omega_n s^{n-1} \\ &= \eta^{-1} \alpha(g(s)) g'(s)\end{aligned}$$

e portanto

$$-\eta \leq g'(s) \leq 0,$$

para todo s.

Logo, denotando por $S(1)$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, por (4.25)

$$\begin{aligned}k = \int_{\mathbb{R}^n} G(z) \, dz &= \int_{\mathbb{R}^n} G^*(z) \, dz \\ &= \int_0^\infty \int_{S(1)} s^{n-1} g(s) \, dA_s \, ds \\ &= n\omega_n \int_0^\infty s^{n-1} g(s) \, ds;\end{aligned}$$

e pelas propriedades de apresentações esféricas decrescentes mencionadas no Capítulo 1, juntamente com (4.26),

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \lambda_j &= \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{2m} G(z) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{2m} G^*(z)\, dz \\
&= n\omega_n \int_0^{\infty} s^{n+2m-1} g(s)\, ds,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

lembrando que $z \longmapsto |z|^{2m}$ é uma função radial e crescente. Estamos interessados agora em utilizar o Lema 4.5. Para isto, considere A como definido no Lema 4.5, e tome

$$\psi(s) = g(s), \quad A = \frac{k}{n\omega_n}, \quad \eta = 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega|\; I(\Omega)}. \tag{4.28}$$

Podemos então escrever (Capítulo 1, equação (1.13))

$$\begin{aligned}
\eta &= 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega|\; I(\Omega)} \\
&\geq 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega|\; \tfrac{n}{n+2}|\Omega| \left(\tfrac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{2/n}} \\
&= 2(2\pi)^{-n}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}} \omega^{-\frac{1}{n}} |\Omega|^{\frac{n+1}{n}}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Por outro lado, $0 < g(0) < \sup G^*(z) = \sup G(z) \leq (2\pi)^{-n}|\Omega|$, e consequentemente utilizando as equações (4.28) e (4.29), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{g(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{6n\eta^2 (nA)^{\frac{2}{n}}} &\leq \frac{((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{\frac{2n+2}{n}}}{6n(2(2\pi)^{-n}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{1/2}\omega_n^{-1/n}|\Omega|^{\frac{n+1}{n}})^2\left(\frac{k}{\omega_n}\right)^{2/n}} \\
&= \frac{n+2}{24n^2}\frac{\omega_n^{\frac{4}{n}}}{(2\pi)^2 k^{2/n}} \\
&\leq \frac{n+2}{24n^2}\frac{\omega_n^{\frac{4}{n}}}{(2\pi)^2}.
\end{aligned}$$

Da relação $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, podemos estimar (conferir [17])

$$\frac{\omega_n^{\frac{4}{n}}}{(2\pi)^2} < \frac{1}{2}, \tag{4.30}$$

donde

$$\frac{g(0)^{\frac{2n+2}{n}}}{6n\eta^2 (nA)^{\frac{2}{n}}} \leq \frac{n+2}{48n^2} < 1. \tag{4.31}$$

Podemos observar então que a função $\psi(s) = g(s)$ satisfaz as condições do Lema 4.5 com n sendo a dimensão do espaço euclidiano e

$$\eta = 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega|\ I(\Omega)}, \quad d = \frac{n+2}{48n^2}, \quad \text{e } m = l - r.$$

Logo, pelo Lema 4.5 e por (4.27), teremos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \\
&\geq n\omega_n \int_0^\infty s^{n+2m-1} g(s)\, ds \\
&\geq \frac{n}{n+2m} k^{\frac{n+2m}{n}} \omega_n^{-\frac{2m}{n}} g(0)^{-\frac{2m}{n}} \\
&+ \left[\frac{1}{6\eta^2(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))}{288n^2\eta^2(n+2)(n+2m)}\right] \omega_n^{-\frac{2m-2}{n}} k^{\frac{2(m-1)+n}{n}} g(0)^{\frac{2(n+1-m)}{n}} \\
&+ \left[\frac{2(m-1)}{(n+2m)(n+2)36\eta^4} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))}{1728n^2(n+2m)(n+2)\eta^4}\right] \frac{\omega_n^{\frac{4-2m}{n}} k^{\frac{2m-4+n}{n}}}{n} g(0)^{\frac{2(2+2n-m)}{n}} \\
&+ \left[\frac{(m-1)}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2(m-1)}}\right] \omega_n^{-\frac{2}{n}} n k^{\frac{n+2}{n}} g(0)^{\frac{2n(m-1)-2}{n}} \\
&+ \left[\frac{(m-1)}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m}}\right] k g(0)^{2m}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Neste momento definimos uma função F por

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{n}{n+2m} k^{\frac{n+2m}{n}} \omega_n^{-\frac{2m}{n}} t^{-\frac{2m}{n}} \\
&+ \left[\frac{1}{6\eta^2(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))}{288n^2\eta^2(n+2)(n+2m)} \right] \omega_n^{-\frac{2m-2}{n}} k^{\frac{2(m-1)+n}{n}} t^{\frac{2(n+1-m)}{n}} \\
&+ \left[\frac{2(m-1)}{(n+2m)(n+2)36n\eta^4} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))}{1728n^3(n+2m)(n+2)\eta^4} \right] \omega_n^{\frac{4-2m}{n}} k^{\frac{2m-4+n}{n}} t^{\frac{2(2+2n-m)}{n}} \\
&+ \left[\frac{n(m-1)}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2(m-1)}} \right] \omega_n^{-\frac{2}{n}} k^{\frac{n+2}{n}} t^{\frac{2n(m-1)-2}{n}} \\
&+ \left[\frac{(m-1)}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m}} \right] k t^{2m}.
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

Facilmente vemos que

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= \left(-\frac{2m}{n}\right) \frac{n}{n+2m} k^{\frac{n+2m}{n}} \omega_n^{-\frac{2m}{n}} t^{\frac{-2m-n}{n}} \\
&+ \left[\frac{1}{6\eta^2(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))}{288n^2\eta^2(n+2)(n+2m)} \right] \\
&\times \left(\frac{2(n+1-m)}{n} \right) \omega_n^{-\frac{2m-2}{n}} k^{\frac{2(m-1)+n}{n}} t^{\frac{n+2-2m}{n}} \\
&+ \left[\frac{2(m-1)}{(n+2m)(n+2)36n\eta^4} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))}{1728n^3(n+2m)(n+2)\eta^4} \right] \\
&\times \left(\frac{2(2+2n-m)}{n} \right) \omega_n^{\frac{4-2m}{n}} k^{\frac{2m-4+n}{n}} t^{\frac{4+3n-2m}{n}} \\
&+ \left[\frac{n(m-1)}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2(m-1)}} \right] \left(\frac{2n(m-1)-2}{n} \right) \omega_n^{-\frac{2}{n}} k^{\frac{n+2}{n}} t^{\frac{2nm-3n-2}{n}} \\
&+ \left[\frac{(m-1)}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m}} \right] (2m) k t^{2m-1}.
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

Pela propriedade (1.13) do Capítulo 1 sobre momento de inércia, e lembrando que $\eta = 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega|\, I(\Omega)}$, calculamos

$$
\begin{aligned}
\eta &\geq 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega|^2\left(\frac{n}{n+2}\right)\left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{\frac{2}{n}}} \\
&= 2(2\pi)^{-n}|\Omega|^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}}\omega_n^{-\frac{1}{n}} \\
&= 2\pi)^{-n}|\Omega|^{\frac{n+1}{n}}\omega_n^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{4n}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq (2\pi)^{-n}\omega_n^{-\frac{1}{n}}|\Omega|^{\frac{n+1}{n}},
\end{aligned}
$$

donde obtemos

$$\frac{1}{\eta} \leq (2\pi)^n\omega_n^{\frac{1}{n}}|\Omega|^{-\frac{n+1}{n}},$$

cuja substituição na equação (4.34) resulta em

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq\ & \left(-\frac{2m}{n+2m}\right)k^{\frac{n+2m}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}t^{\frac{-2m-n}{n}} \\
& + \left[\frac{(n+1-m)}{3n(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))(n+1-m)}{144n^3(n+2)(n+2m)}\right] \\
& \times\omega_n^{-\frac{2m-2}{n}}k^{\frac{2(m-1)+n}{n}}(2\pi)^{2n}\omega_n^{\frac{2}{n}}|\Omega|^{-\frac{2(n+1)}{n}}t^{\frac{n+2-2m}{n}} \\
& + \left[\frac{(m-1)(2+2n-m)}{(n+2m)(n+2)9n^2} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))(2+2n-m)}{864n^4(n+2m)(n+2)}\right] \\
& \times\omega_n^{\frac{4-2m}{n}}k^{\frac{2m-4+n}{n}}(2\pi)^{4n}\omega_n^{\frac{4}{n}}|\Omega|^{-\frac{4(n+1)}{n}}t^{\frac{4+3n-2m}{n}} \\
& + \left[\frac{(m-1)(2n(m-1)-2)}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}}\right]\left((2\pi)^{2n}\omega_n^{\frac{2}{n}}|\Omega|^{-\frac{2(n+1)}{n}}\right)^{m-1}\omega_n^{-\frac{2}{n}}k^{\frac{n+2}{n}}t^{\frac{2nm-3n-2}{n}} \\
& + \left[\frac{m(m-1)}{3(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{2m-3}}\right]k(2\pi)^{2nm}\omega_n^{\frac{2m}{n}}|\Omega|^{-\frac{2m(n+1)}{n}}t^{2m-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& t^{-\frac{n+2m}{n}} \frac{k}{n+2m} \\
& \times \left\{ \left[\frac{(n+1-m)(n+2m)}{3n(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))(n+1-m)}{144n^3(n+2)} \right] \widetilde{C}_1 t^{\frac{2n+2}{n}} \right. \\
& + \left[\frac{(m-1)(2+2n-m)}{9n^2(n+2)} - \frac{(m-1)(n+2(2-m))(2+2n-m)}{864n^4(n+2)} \right] \widetilde{C}_2 t^{\frac{4n+4}{n}} \\
& + \left[\frac{(m-1)(2n(m-1)-2)}{(n+2)(2m-1)2^{2m-3}} \right] \widetilde{C}_3 t^{\frac{(2n+2)(m-1)}{n}} \\
& \left. + \left[\frac{m(m-1)}{3(n+2)(2m-1)2^{2m-3}} \right] \widetilde{C}_4 t^{\frac{2mn+2m}{n}} - (2m)\omega_n^{\frac{-2m}{n}} k^{\frac{2m}{n}} \right\},
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

onde definimos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{C}_1 &= k^{\frac{2(m-1)}{n}} (2\pi)^{2n} |\Omega|^{-\frac{2(n+1)}{n}} \omega_n^{-\frac{2(m-2)}{n}}, \\
\widetilde{C}_2 &= k^{\frac{2m-4}{n}} (2\pi)^{4n} |\Omega|^{-\frac{4(n+1)}{n}} \omega_n^{\frac{8-2m}{n}}, \\
\widetilde{C}_3 &= k^{\frac{2}{n}} (2\pi)^{2n(m-1)} |\Omega|^{-\frac{2(m-1)(n+1)}{n}} \omega_n^{\frac{2m-4}{n}}, \\
\widetilde{C}_4 &= (2\pi)^{2mn} |\Omega|^{-\frac{2m(n+1)}{n}} \omega_n^{\frac{2m}{n}}.
\end{aligned}
$$

Neste caso podemos então fazer $C_1 = \widetilde{C}_1$, $C_2 = \widetilde{C}_2$, $C_3 = \widetilde{C}_3$ e $C_4 = \widetilde{C}_4$, onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são definidos como no Lema 4.7. Então por (4.35) podemos escrever

$$
t^{\frac{n+2m}{n}} \frac{n+2m}{k} F'(t) \leq \left\{ P(t) - (2m)\omega_n^{\frac{-2m}{n}} k^{\frac{2m}{n}} \right\}, \tag{4.36}
$$

onde $P(t)$ é o polinômio definido no Lema 4.7. Impondo a condição $1 \leq m \leq n+1$, o mesmo lema nos diz que

$$
\widetilde{P}(t) := P(t) - (2m)\omega_n^{\frac{-2m}{n}} k^{\frac{2m}{n}} \tag{4.37}
$$

é uma função crescente em t. Provaremos que a função F é decrescente em $t \in (0, (2\pi)^{-n}|\Omega|]$.

Para isto, primeiro estimamos $\widetilde{P}(t)$ em $t = (2\pi)^{-n}|\Omega|$ como segue:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}((2\pi)^{-n}|\Omega|) &= \frac{(n+1-m)}{3n(n+2)}\left[(n+2m) - \frac{(m-1)(n+4-2m)}{48n^2}\right] \\
&\quad \times k^{\frac{2(m-1)}{n}}(2\pi)^{2n}|\Omega|^{\frac{-2(n+1)}{n}}\omega_n^{\frac{-2(m-2)}{n}}((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{\frac{2n+2}{n}} \\
&\quad + \frac{(m-1)(2+2n-m)}{9n^2(n+2)}\left[1 - \frac{n+4-2m}{96n^2}\right] \\
&\quad \times k^{\frac{2m-4)}{n}}(2\pi)^{4n}|\Omega|^{\frac{-4(n+1)}{n}}\omega_n^{\frac{-2(m-4)}{n}}((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{\frac{4n+4}{n}} \\
&\quad + \left[\frac{(m-1)(2n(m-1)-2)}{(n+2)(2m-1)2^{2m-3}}\right]k^{\frac{2}{n}}(2\pi)^{2n(m-1)}|\Omega|^{\frac{-2(n+1)(m-1)}{n}}\omega_n^{\frac{2(m-2)}{n}} \\
&\quad \times((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{\frac{(2n+2)(m-1)}{n}} \\
&\quad + \left[\frac{m(m-1)}{3(n+2)(2m-1)2^{2m-3}}\right](2\pi)^{2mn}|\Omega|^{\frac{-2m(n+1)}{n}}\omega_n^{\frac{2m}{n}} \\
&\quad \times((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{\frac{2mn+2m}{n}} - (2m)\omega_n^{\frac{-2m}{n}}k^{\frac{2m}{n}}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Caso $\widetilde{P}((2\pi)^{-n}|\Omega|) \leq 0$, a inequação acima é equivalente a

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q(m,n)} &= \frac{(n+1-m)}{6nm(n+2)}\left[(n+2m) - \frac{(m-1)(n+4-2m)}{48n^2}\right]k^{\frac{2m-2}{n}}\omega_n^{-\frac{2(m-2)}{n}}(2\pi)^{-2} \\
&\quad + \frac{(m-1)(2+2m-m)}{18n^2m(n+2)}\left[1 - \frac{(n+4-2m)}{96n^2}\right]k^{\frac{2m-4}{n}}\omega_n^{-\frac{2(m-4)}{n}}(2\pi)^{-4} \\
&\quad + \left[\frac{(m-1)(2n(m-1)-2)}{m(n+2)(2m-1)2^{2m-2}}\right]k^{\frac{2}{n}}\omega_n^{\frac{2(m-2)}{n}}(2\pi)^{-2(m-1)} \\
&\quad + \left[\frac{(m-1)}{6(n+2)(2m-1)2^{2m-3}}\right]\omega_n^{\frac{2m}{n}}(2\pi)^{-2m} \\
&\leq \omega_n^{-\frac{2m}{n}}k^{\frac{2m}{n}}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Utilizando (4.30), calculamos

$$k^{\frac{2m-2}{n}}(2\pi)^{-2}\omega_n^{-\frac{2(m-2)}{n}} = k^{\frac{2m-2}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}\omega_n^{\frac{4}{n}}(2\pi)^{-2} < k^{\frac{2m}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}; \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} k^{\frac{2(m-2)}{n}}\omega_n^{-\frac{2(m-4)}{n}}(2\pi)^{-4} &< k^{\frac{2m}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}(\omega_n^{\frac{4}{n}}(2\pi)^{-2})(\omega_n^{\frac{4}{n}}(2\pi)^{-2}) \\ &< k^{\frac{2m}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}; \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} k^{\frac{2}{n}}\omega_n^{\frac{2(m-2)}{n}}(2\pi)^{-2(m-1)} &= k^{\frac{2}{n}}\omega_n^{\frac{2(m-1)}{n}}\omega_n^{-\frac{2}{n}}\omega_n^{\frac{2(m-1)}{n}}\omega_n^{-\frac{2(m-1)}{n}}(2\pi)^{-2(m-1)} \\ &< k^{\frac{2m}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}(\omega_n^{\frac{4}{n}}(2\pi)^{-2})^{m-1} \\ &< k^{\frac{2m}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}; \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} \omega_n^{\frac{2m}{n}}(2\pi)^{-2m} &= (2\pi)^{-2m}\omega_n^{\frac{4m}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}} \\ &= (\omega_n^{\frac{4}{n}}(2\pi)^{-2})^m\omega_n^{-\frac{2m}{n}} \\ &< \omega_n^{-\frac{2m}{n}} \\ &< \omega_n^{-\frac{2m}{n}}k^{\frac{2m}{n}}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Utilizando (4.40)-(4.43) em (4.39) e lembrando que $1 \leq m \leq n+1$, podemos conluir que

Caso a) Caso $(n+4-2m) \leq 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{Q(m,n)} \;\leq\; & \left\{ \frac{(n+1-m)}{6nm(n+2)} \left[(n+2m) - \frac{(m-1)(n+4-2m)}{48n^2} \right] \right. \\ & + \frac{(m-1)(2+2m-m)}{18n^2m(n+2)} \left[1 - \frac{(n+4-2m)}{96n^2} \right] \\ & + \left[\frac{(m-1)(nm-n-1)}{m(n+2)(2m-1)2^{2m-3}} \right] \\ & \left. + \left[\frac{(m-1)}{6(n+2)(2m-1)2^{2m-3}} \right] \right\} \omega_n^{-\frac{2m}{n}} k^{\frac{2m}{n}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< & \left\{\frac{1}{6(nm+2m)}\left[(n+2m)+\frac{(m-1)(2m-n-4)}{48n^2}\right]\right. \\
& +\frac{1}{9n^2}\left[1+\frac{2m-4-n}{96n^2}\right]+\frac{n(m-1)}{(n+2)(2m-1)2^{2m-3}} \\
& \left.+\frac{1}{6(n+2)2^{2m-3}}\right\}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}k^{\frac{2m}{n}} \qquad (4.44) \\
< & \left\{\frac{1}{6}+\frac{1}{144n^2}+\frac{1}{9n^2}+\frac{1}{432n^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right\}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}k^{\frac{2m}{n}} \\
< & \ \omega_n^{-\frac{2m}{n}}k^{\frac{2m}{n}}.
\end{aligned}
$$

Caso b) Caso $(n+4-2m) \geq 0$, utilizando-se dos cálculos do **Caso a)**, também obtemos da mesma forma do caso anterior a desigualdade

$$\mathbf{Q(m,n)} < \omega_n^{-\frac{2m}{n}}k^{\frac{2m}{n}}.$$

Com estas análises concluímos que de fato vale

$$\widetilde{P}((2\pi)^{-n}|\Omega|) \leq 0.$$

Logo, por (4.36) $F'(t) \leq 0$ para $t \in (0,(2\pi)^{-n}|\Omega|]$, isto é, F é descrescente para $t \in (0,(2\pi)^{-n}|\Omega|]$.

Por outro lado, como $0 < g(0) \leq (2\pi)^{-n}|\Omega|$ e o lado direito da desigualdade (4.32) é exatamente $F(g(0))$, a qual é uma função decrescente sobre $(0,(2\pi)^{-n}|\Omega|]$, podemos substituir $g(0)$ por $(2\pi)^{-n}|\Omega|$, o que nos dá (lembrando que $\eta = 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega|\, I(\Omega)}$ por

(4.28))

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\\
&\geq \frac{n}{n+2m}k^{\frac{n+2m}{n}}\omega_n^{-\frac{2m}{n}}((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{-\frac{2m}{n}}\\
&\quad+\left[\frac{1}{6\eta^2(n+2)}-\frac{(m-1)(n+2(2-m))}{288n^2\eta^2(n+2)(n+2m)}\right]\omega_n^{-\frac{2m-2}{n}}k^{\frac{2(m-1)+n}{n}}((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{\frac{2(n+1-m)}{n}}\\
&\quad+\left[\frac{2(m-1)}{(n+2m)(n+2)36\eta^4}-\frac{(m-1)(n+2(2-m))}{1728n^2(n+2m)(n+2)\eta^4}\right]\frac{\omega_n^{\frac{4-2m}{n}}k^{\frac{2m-4+n}{n}}}{n}((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{\frac{2(2+2n-m)}{n}}\\
&\quad+\left[\frac{(m-1)}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2(m-1)}}\right]\omega_n^{-\frac{2}{n}}nk^{\frac{n+2}{n}}((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{\frac{2n(m-1)-2}{n}}\\
&\quad+\left[\frac{(m-1)}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{2m-3}\eta^{2m}}\right]k((2\pi)^{-n}|\Omega|)^{2m}\\
&=\frac{n}{n+2m}k\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2m}\\
&\quad+\left[\frac{1}{24(n+2)}-\frac{(m-1)(n+2(2-m))}{1152n^2(n+2)(n+2m)}\right]k\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2m-2}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)\\
&\quad+\left[\frac{2(m-1)}{(n+2m)(n+2)576n}-\frac{(m-1)(n+2(2-m))}{27648n^3(n+2m)(n+2)}\right]k\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2m-4}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^2\\
&\quad+\left[\frac{n(m-1)}{(n+2)(n+2m)(2m-1)2^{4m-5}}\right]k\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^{m-1}\\
&\quad+\left[\frac{(m-1)}{6(n+2m)(n+2)(2m-1)2^{4m-3}}\right]k\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^{m}.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Isto prova o item **i)**.

Considere agora o caso em que r é ímpar. Do item **i)** do Teorema 4.2 e da desigualdade (4.16) sabemos que os autovalores Λ_j do problema, com $j = 1, 2, \ldots, k$,

$$\begin{cases} (-\Delta)^l u &= \Lambda(-\Delta)^{r-1} u \quad \text{em } M, \\ u|_{\partial M} &= \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial M} = \ldots = \left.\dfrac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial M} = 0, \end{cases} \tag{4.46}$$

satisfazem

$$\begin{aligned} \Lambda_j \geq\ & \frac{n}{n+2p}\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2p} \\ & + \left[\frac{1}{24(n+2)} - \frac{(p-1)(n+2(2-p))}{1152n^2(n+2)(n+2p)}\right]\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2p-2}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right) \\ & + \left[\frac{2(p-1)}{(n+2p)(n+2)576n} - \frac{(p-1)(n+2(2-p))}{27648n^3(n+2p)(n+2)}\right]\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^{2p-4}\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^2 \\ & + \left[\frac{n(p-1)}{(n+2)(n+2p)(2p-1)2^{4p-5}}\right]\left(\frac{2\pi k^{1/n}}{\omega_n^{1/n}|\Omega|^{1/n}}\right)^2\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^{p-1} \\ & + \left[\frac{(p-1)}{6(n+2p)(n+2)(2p-1)2^{4p-3}}\right]\left(\frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^p, \end{aligned} \tag{4.47}$$

onde $p = l + 1 - r$. Usando o Teorema 4.1 obtemos

$$\lambda_j \geq \Lambda_j^{(p-1)/p},$$

finalizando a demonstração do teorema. ♦

Referências Bibliográficas

[1] Asbaugh, M.S., *Universal eigenvalue bounds of Payne-Pólya-Weinberguer, Hile-Protter and H.C.Yang*, Proc. Indian Acad. Sci.(Math.Sci.) **112**, 3-30 (2002).

[2] Asbaugh, M.S., Benguria, R.D., *More bounds on eigenvalue ratios for Dirichlet Laplacians in n dimensions*, SIAM J. Math. Anal. **24**, 1622-1651 (1993).

[3] Ballmann, W., Gromov, M., Schroeder, V., *Manifolds of Nonpositive curvature*, Birkhäuser, Boston (1985).

[4] Bandle, C., *Isoperimetric inequalities and aplications*, Pitman Monographs and Studies in Mathematics, vol 7, Pitman , Boston, 1980.

[5] Brands, J.J.A.M., *Bounds for the ratios of the first three membrane eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 256-258 (1964).

[6] Brezis, H., *Analyse Fonctionele: Theorie et applications*. Paris Masson (1987).

[7] Brickel, F.,Clark, R.S., *Diferentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Co., London chap.3 (1970).

[8] Caffarelli, A. Luis; Joel Spruck, *Convexity properties of solutions to some classical variational problems*, Comm. Partial Differential Equations, **7**, no.11, 1337-1379 (1982).

[9] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, sexta edição (2002).

[10] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, New York: Academic Press (1984).

[11] Changyu, X., *Universal inequalities for eigenvalues of the vibration problem for a clamped plate on Riemannian manifolds*, Quart. J. Math., **62(1)**, 235-258 (2011).

[12] Cheng, Q-M., Yang, H.C., *Estimates on eigenvalues of Laplacian*, Math. Ann. **331**, 445-460 (2005).

[13] Cheng, Q-M., Yang, H.C., *Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Math. Ann. **337**, 159-175 (2007).

[14] Cheng, Q.M., Yang, H.C., *Inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem*, Trans. A. Math. Soc. **358**, 2625-2635 (2006).

[15] Cheng, Q.M., Yang, H.C., *Universal inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem on hyperbolic space*, Proc. Am. Math. Soc.(in press).

[16] Cheng, Q.M., Ichikawa, T., Mametsuka, S., *Estimates for eigenvalues of a clamped plate problem on Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Jpn. **62**, 673-686 (2010).

[17] Cheng, Q.-M., and Wei, G., *A lower bound for eigenvalues of a clamped plate problem*, preprint.

[18] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations*, Vol.2, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[19] González, B.J. and Negrin, E.R., *Gradient estimates for positive solutions of the Laplacian with drift*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**:2 , 619-625 (1999).

[20] Heintz, E., Im Hof, H.C., *Geometry of horospheres*, J. Diff. Geom. **12**, 481-489 (1997).

[21] Hile, G.N., Protter, M.H., *Inequalities for eigenvalues of the Laplacian*, Indiana Univ. Math. J. **29**, 523-538 (1980).,

[22] Korevaar, J. Nicolas, *Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana University Math. J. **32** 603-614 (1983).

[23] Kroger, P., *Upper bounds dor the Neumann eigenvalues on a bounded domain in Euclidean space*, J. Func. Anal. **106**, 353-357 (1992).

[24] Kroger, P., *Estimates dor sums of eigenvalues of the Laplacian*, J. Func. Anal. **126**, 217-227 (1994).

[25] Ku, H.T., Ku, M.C., Tang, D.Y., *Inequalities for eigenvalues of elliptic equations and the Generalized Pólya Conjecture*, J. Diff. Equ., **97**, 127-139 (1992).

[26] Leung, P.F., *On the consecutive eigenvalues of the Laplacian of a compact minimal submanifold in a sphere*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **50**, 409-416 (1991).

[27] Li, P., Yau, S.T.,*On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem*, Commun. Math. Phys., **88**, 309-318 (1983).

[28] Ling, Jun, *Estimates on the lower bound of the first gap*, Communications in Analysis and Geometry, **vol. 16, number 3**, 539-563 (2008).

[29] Ma, Li; Liu, Baiyu, *Convexity of the first eigenfunction of the drifting Laplacian operator and its applications*, New York J. Math., **14** 393-401 (2008).

[30] Ma, Li; Liu, Baiyu, *Convex eigenfunction of a drifting laplacian operator and the fundamental gap*, Pac. J. Math., **vol. 240, number 2**, 343-361 (2009).

[31] Melas, A.D., *A lower bound for sums of eigenvalues of the Laplacian*, Proc. Am. Math. Soc., **131**, 631-636 (2003).

[32] Payne,L., Polya,G. and Weinberger,H., *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. Phys. **35**, 289-298 (1956).

[33] Pólya, G., *On the eigenvalues of vibrating membranes*, Proc. Lond. Math. Soc., **11**, 419-433 (1961).

[34] Pólya, G. and Szegö, G., *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Annal of mathematics studies, number **27**, Princeton university press, Princeton, New Jersey, 1951.

[35] Sakai, T., *On Riemannian manifolds admitting a function whose gradient is of constant norm*, Kodai Math. J. **19**, 39-51 (1996).

[36] Schoen, R. and Yau, S.-T, *Lectures on Differential Geometry*, International Press, 1994.

[37] Takahashi, T., *Minimal imersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **18**, 380-385 (1996).

[38] Yang, H.C., *An estimate of the difference between consecutive eigenvalues*, Preprint IC/91/60 of ICTP, Trieste (1991).

[39] Yang, H.C., *Estimates of the difference between consecutive eigenvalues*, (1995) preprint (revision of International Centre for Theoretical Physics preprint IC/91/60, Trieste, Italy, April 1991).

[40] Yau, S.T., *An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator*, In SunYung Alice Achang, Achang-Shou Lin and Horng-Tzer Yau, editors, *Lectures on Partial differenctial Equations: Proceedings in honor of Louis Nirenberg's 75th Birthday*, 223-235, International Press, 2003.

[41] Yu, Q.H. and Zhong, J.-Q., *Lower bounds of the gap between the first and second eigenvalues in the Schrödinger operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **294** , 341-349 (1986).

[42] Wang, Q. and Changyu, X., *Inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem*, Calc. Var. Part. Dif. Eq., **40**, numbers 1-2, 273-289 (2010).

[43] Wang, Q. and Changyu, X., *Comparison Theorems for Eigenvalues of Elliptic Operators and the Generalized Pólya Conjecture*, Math. Phys. Anal. Geo., **13**, 235-253 (2010).

[44] Weyl, H., *Das asymptotische Weteilungsgesetz der Eigenwete linearer partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann., **71**(71), 441-479 (1912).

[45] Weinberger, Hans F., *Variational methods for eigenvalue aproximation*, Philadelphia: SIAM.

[46] Zhong, Jia-Qing and Yang, Hong-Zhang, *Estimates of the first eigenvalue of Laplace operator on compact Riemannian manifolds*, Sci. Sinica Ser.A **9** (1983), 812-820 (Chinese).